

Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico*

Socratic Interview for Understanding Ellipse Concept as a Geometric Locus

Interview socratique pour la compréhension du concept d'ellipse comme lieu géométrique

Zaida Margot Santa Ramírez

Licenciada en Matemáticas y Física Universidad de Antioquia
Magíster en Educación Universidad de Antioquia
Estudiante de Doctorado en Educación Universidad de Antioquia
Formadora del Programa Todos a Aprender
del Ministerio de Educación Nacional (MEN)
zsanta@ayura.udea.edu.co, zsanta@gmail.com

Carlos Mario Jaramillo López

Licenciado en Matemáticas Universidad de Medellín
Doctor en Ciencias Matemáticas
Universidad Politécnica de Valencia
Profesor Titular del Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia
Líder del Grupo de Investigación
Educación Matemática e Historia (UdeA - Eafit)
cama@matematicas.udea.edu.co, camaja59@gmail.com

Cómo citar el artículo

Santa Ramírez, Z. M. & Jaramillo López, C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 45-60. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/464/986>

Tipo de artículo:	Investigación e innovación
Recibido:	29 de julio de 2013
Evaluado:	31 de agosto de 2013
Aprobado:	20 de enero de 2014

Resumen

Considerando que una amplia población de estudiantes de la interfase bachillerato - universidad presenta dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, pero que logran manipular ecuaciones y realizar operaciones algorítmicas correspondientes, nuestro trabajo de investigación, mediante un estudio de casos cualitativo, logró analizar y caracterizar el proceso de comprensión de cinco estudiantes de una institución educativa pública de la ciudad de Medellín, del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. Dos resultados relevantes emergieron de este proceso y permitieron caracterizar la comprensión: un conjunto de descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele y un guion de entrevista de carácter socrático, con preguntas basadas en la visualización de construcciones elaboradas mediante el

doblado de papel. Por lo tanto, en este artículo se presentan los resultados más relevantes de este estudio.

Palabras clave

Comprensión, Descriptor de nivel, Doblado de papel, Elipse, Entrevista socrática.

Abstract

Considering the fact that a large population of students, in the limit between high school final years and college freshmen period, has some difficulties for understanding the concepts of conic sections as a geometric locus, but that they can manipulate equations and they also can develop algorithmic exercises, our research, based on a qualitative case study, allowed us analyzing and

* Este artículo se deriva del trabajo de investigación: *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*, llevado a cabo en el marco del programa de Maestría en Educación, en la línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia, en el año 2011.

characterizing the understanding process of five students, belonging to a public Education Institution from Medellín, Colombia, of the ellipse concept as a geometric locus through paper folding. Two relevant results emerged from this process and they permitted characterizing the process of understanding: a set of Van Hiele's reasoning descriptors and a Socratic interview, with questions based on visualization through paper folding constructions. Therefore, this paper presents the most relevant results of this study.

Key words

Understanding, level descriptor, paper folding, ellipse, Socratic interview.

Résumé

En considérant que la plupart des étudiants de la interface lycée terminale-université a des difficultés pour comprendre les concepts des section coniques comme lieux géométriques, mais

qu'ils peuvent manipuler des équations et qu'ils sont capables de réaliser des opérations algorithmiques respectives, notre travail de recherche, en utilisant un étude de cas qualitatif, a réussi d'analyser et caractériser le processus de compréhension de cinq étudiants d'une institution éducative publique de la ville de Medellín, Colombie, par rapport au concept d'ellipse comme lieu géométrique, au moyen de l'art du pliage de papier. Deux résultats principaux sont obtenus pendant ce processus et ils ont permis de caractériser la compréhension : un ensemble de descripteurs des niveaux de raisonnement de Van Hiele et un scénario d'interview de type socratique, avec des questions qui se basent sur la visualisation des constructions élaborés au moyen de l'art du pliage. Cet article présente les résultats les plus importants par rapport à cette étude.

Mots-clés

Compréhension, descripteur de niveau, art du pliage, ellipse, interview socratique

Introducción

Basados en nuestra experiencia docente a nivel universitario, observamos que algunos estudiantes de los primeros semestres poseen habilidades de tipo algorítmico para determinar las ecuaciones de las secciones cónicas o encontrar sus elementos, pero no reconocen ni comprenden los conceptos asociados a estas como lugares geométricos. Incluso, hemos encontrado estudiantes que no reconocen ni la ecuación ni su concepto correspondiente. Al respecto, Cruz y Mariño (1999) afirman que: “dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas” (p. 15). Y argumentan, además, que:

En los trabajos sobre educación matemática para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos de los estudiantes se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el porqué de su definición como lugar geométrico, lo cual limita la comprensión del alcance de las posibilidades de que disponen. (p. 15).

De este modo, pudimos detectar que muchos estudiantes de la interfase bachillerato-universidad, tenían dificultades para comprender los conceptos de las secciones cónicas como lugares geométricos, mientras que lograban con facilidad la búsqueda algorítmica de sus ecuaciones o de sus elementos. Por lo tanto, esta investigación pretendió responder a la pregunta: ¿cómo comprenden los estudiantes el concepto de elipse como lugar geométrico mediante la geometría del doblado de papel, en el contexto del modelo educativo de Van Hiele?

Considerando nuestra experiencia docente y la articulación entre el modelo teórico y la temática particular (concepto de elipse), surgieron unos descriptores hipotéticos de los niveles de razonamiento de Van Hiele; a su vez, en correspondencia con estos descriptores, se construyó un guion de entrevista hipotético de carácter socrático con preguntas basadas en la visualización de construcciones elaboradas mediante el doblado de papel.

La entrevista con cada uno de los cinco estudiantes del estudio de casos se hizo con el fin de analizar su nivel de razonamiento y refinar tanto el guion entrevista como los descriptores. Es decir, de las interacciones con los participantes, las cuales se reflejaron en sus comentarios, intereses, necesidades, preguntas, escritos, entre otros, se establecieron como tal los descriptores de nivel¹ y el guion de entrevista correspondiente que nos permitió, finalmente, caracterizar el nivel en el que estaba razonando un estudiante determinado.

Por lo tanto, en el transcurso del artículo se presentan algunas ideas desarrolladas por Jaramillo, Londoño & Jurado (2012) que fundamentan el uso de una entrevista de carácter socrático para analizar el proceso de comprensión de un estudiante frente a un concepto matemático determinado; además, se detalla la metodología que se abordó en el estudio y el análisis de la comprensión de uno de los cinco estudiantes del estudio de casos, con el propósito de esclarecer tanto el uso de los descriptores de nivel como de la entrevista. Al final, se exhiben algunas preguntas de la entrevista y se presentan las principales conclusiones de la investigación.

Entrevista de carácter socrático

Algunas tesis doctorales como las de J. L. Llorens (1994), P. Campillo (1998), A. de la Torre (2000), C. Jaramillo (2000) y P. Esteban (2000) (Citados por Jaramillo & Campillo, 2001), han probado que un buen diseño de entrevista de carácter socrático en el contexto de Van Hiele, permite revelar el nivel de razonamiento de un estudiante frente a un concepto matemático determinado (Jaramillo & Campillo, 2001). Es decir,

El propósito que se persigue con la entrevista socrática es que el aprendiz reflexione no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos (De la Torre, 2003, p. 116).

En este sentido, el proceso a través de una entrevista socrática se convierte no sólo en una herramienta para que el investigador observe la evolución del razonamiento de los estudiantes, sino también, se constituye en una experiencia de aprendizaje para estos últimos, porque les permite avanzar en su nivel de razonamiento (Jaramillo & Campillo, 2001). De hecho, el camino hacia el conocimiento es un proceso que se da de forma gradual, con etapas intermedias como la opinión y la creencia. Por lo tanto, de acuerdo con De la Torre (2003), el aprendiz participa activamente en su proceso, que finaliza cuando este inventa o descubre la respuesta pertinente a una pregunta bien elaborada, manifestando además, su nivel de pensamiento con respecto al concepto estudiado.

Según Jaramillo, Londoño y Jurado (2012), un diálogo de carácter socrático cumple con las siguientes diez características:

Intencionalidad de la entrevista: el entrevistador debe conocer muy bien los objetivos que debe lograr el estudiante en el desarrollo de la entrevista, para poder determinar su nivel de razonamiento. En este sentido, lo más importante es que el aprendiz pueda dar respuestas espontáneas, que surgen de su razonamiento crítico y reflexivo y pueda lograr una amplia comprensión del concepto objeto de estudio.

El lenguaje: el entrevistador debe manejar un lenguaje acorde con el vocabulario común del estudiante. Incluso, debe utilizar palabras que lo motiven a responder de forma espontánea, sin miedo a equivocarse. En todo momento, el diálogo entre entrevistador y entrevistado debe fluir con mucha naturalidad, generando una atmósfera de confianza entre ambos. Sin embargo, es fundamental considerar que el lenguaje utilizado por el estudiante es un factor determinante para detectar su nivel de razonamiento, dado que a medida que va avanzado, va reestructurando su red de relaciones y su lenguaje se hace más preciso y refinado.

Los conceptos básicos: las preguntas iniciales que el entrevistador formule tienen el propósito de indagar por los conceptos básicos indispensables para la comprensión del concepto objeto de estudio. Es decir, estas preguntas permiten saber si el estudiante supera las habilidades, características y conocimientos del primer nivel de razonamiento.

¹ "Se entenderá por descriptores de los niveles de van Hiele las principales características que permiten reconocer, a partir de la actividad del estudiante, cada uno de estos niveles de razonamiento matemático" (Jaramillo, Londoño & Jurado, 2012, p. 21).

Las experiencias previas del entrevistado: la entrevista debe contener preguntas “inquisitivas” o preguntas intencionadas que conduzcan a la búsqueda de lo que se quiere conocer. Este tipo de preguntas le brindan la posibilidad al estudiante de responder lo que él cree saber, de acuerdo con sus conocimientos previos y sus experiencias anteriores, pues no se puede negar el carácter histórico del estudiante.

Diálogo inquisitivo: el diálogo inquisitivo es una interacción entre entrevistador y entrevistado, que le permite a este último, a través de un pensamiento discursivo, descubrir, encontrar soluciones y comprender el concepto objeto de estudio, ampliando su red de relaciones (Jaramillo, Londoño & Jurado, 2012). El estudiante puede percibir relaciones nuevas o conceptos que no veía antes e involucrarlos en su red, ampliándola o modificándola. Es importante aclarar que “el entrevistador no le enseña nada al entrevistado, sólo lo conduce mediante la indagación y el razonamiento” (p. 121).

Pensamiento discursivo: en la entrevista se hace necesario realizar una misma pregunta varias veces y en diferentes instantes. En un primer momento se hace para que el estudiante informe lo que sabe al respecto. En un segundo o posterior momento se hace para que el estudiante tenga la posibilidad de dar respuestas más elaboradas, pues ha logrado ampliar o modificar su red de relaciones.

El aporte de información: algunas de las preguntas de la entrevista brindan la información necesaria para que el estudiante pueda llegar a la comprensión del concepto, con base en sus reflexiones y razonamientos. Estos aportes pueden aparecer como “definición de nuevos conceptos, relaciones con otras ideas afines o ampliación del vocabulario” (Jaramillo, Londoño & Jurado, 2012, p. 123). La información suministrada por el entrevistador no debe “sugerir enseñanza ni explicación alguna” (p. 123).

La problematización con las ideas: hay preguntas en la entrevista que logran que el estudiante se sienta consciente y enriquezca su propio saber. Mientras que hay otras que logran que el estudiante explicita “sus carencias o dificultades” (Jaramillo, Londoño & Jurado, 2012, p. 124). En este caso, el entrevistado entra en un estado de “contradicción, de problematización, de conflicto interno, de confrontación con sus ideas” (p. 124). Las ansias de hallar la verdad lo pueden llevar a cambiar totalmente la estructura de pensamiento que tenía acerca del concepto o requerir la ayuda del entrevistador para elaborar, modificar o extender su red de relaciones.

El paso por los tres momentos: durante la entrevista el estudiante pasa por tres momentos:

Crear saber la respuesta a la pregunta, luego, a través de las mismas preguntas darse cuenta de que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto (Jaramillo, Londoño & Jurado, 2012, p. 125).

La red de relaciones: las preguntas de la entrevista deben estar formuladas y distribuidas de tal manera que el entrevistado pueda construir y/o fortalecer una estructura mental alrededor del concepto objeto de estudio, con base en los elementos, procesos y procedimientos que le proporciona la misma entrevista para razonar y reflexionar: mecanismos visual-geométricos, verbales o escritos (Jaramillo, Londoño & Jurado, 2012).

Metodología

Esta investigación estuvo orientada bajo una metodología de corte cualitativo. Las actividades que surgieron de esta fueron relativas, es decir, dependieron del contexto del cual se extrajeron los datos, pues el guion de entrevista final y los descriptores finales de los niveles de razonamiento surgieron de observaciones, de los materiales de los estudiantes y de las entrevistas individuales y grupales con ellos. Las entrevistas individuales, en particular, sirvieron para analizar su proceso de comprensión de acuerdo con los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación con el concepto de elipse como lugar geométrico, utilizando la geometría del doblado de papel.

En este sentido, se consideró fundamental el aspecto subjetivo de la realidad de los estudiantes. Por lo tanto, la información que se recolectó fue en forma de textos (encuestas), imágenes (material de los estudiantes), observaciones, entrevistas, análisis documentales (material de los estudiantes), entre otros.

De acuerdo al paradigma cualitativo, el tipo de estudio que abordó esta investigación fue un “estudio de casos” múltiple (Hernández, Fernández & Baptista, 2006) de estudiantes de cierta institución educativa de la ciudad de Medellín, que estaban próximos a abordar la temática relacionada con las secciones cónicas.

Las razones por las cuales se optó por un estudio de casos son las siguientes:

- Según Chetty (1996, citado por Martínez, 2006), permite estudiar un tema determinado (el concepto de elipse como lugar geométrico) donde la teoría existente (Modelo de Van Hiele) no aplica todavía.
- Según Yin (1989, citado por Martínez, 2006) se utilizan varias fuentes de datos como las observaciones, las entrevistas, las encuestas y el análisis de textos bibliográficos.
- Además de tratar de encontrar patrones entre los diferentes casos, también se pretendió profundizar en el plano individual, al analizar el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico de cada estudiante.

Por lo tanto, nuestra investigación se centró en el análisis del proceso de comprensión de cinco estudiantes del concepto específico de elipse como lugar geométrico. Dicho análisis se hizo triangulando tres fuentes principales de información: encuesta, entrevista y material del estudiante. Nuestras primeras entrevistas nos permitieron refinar el guion de entrevista y, a su vez, los descriptores de nivel. Posteriormente, se hizo una triangulación del análisis de los cinco casos, con el marco teórico y las observaciones del investigador, para tratar de encontrar patrones en los diferentes casos.

Trabajo de campo, resultados y discusión

A continuación, se presenta el análisis del proceso de comprensión de una de las estudiantes participantes en el estudio cualitativo.

Es importante mencionar que el análisis del proceso de comprensión de los demás estudiantes se hizo de la misma manera. Por lo tanto, para efectos de esclarecer la forma como se desarrolló dicho análisis, solo presentamos uno de los casos relevantes.

La estudiante, cuyo seudónimo es Rosi, era del grado décimo de una Institución Educativa de carácter público de la ciudad de Medellín. Fue invitada a participar del trabajo por su agrado por el doblado de papel y por su responsabilidad frente a las actividades que se realizaban en la clase de geometría. Para realizar el análisis individual de su proceso de comprensión, se consideraron tres fuentes de información: las respuestas escritas de una encuesta abierta sobre conocimientos previos de geometría, la elaboración de sus materiales de apoyo en entrevistas grupales y las respuestas verbales brindadas en el transcurso de la entrevista individual.

De las entrevistas grupales surgieron algunos materiales elaborados por Rosi, que se involucraron dentro del análisis individual de su proceso de comprensión. Algunos de ellos los mostramos a continuación:

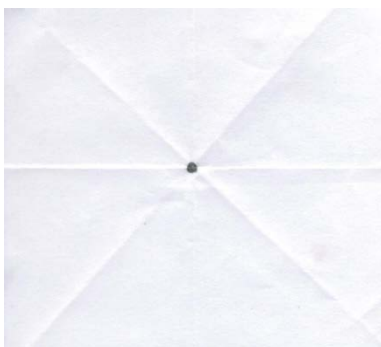


Ilustración 1: Material de Rosi 1.

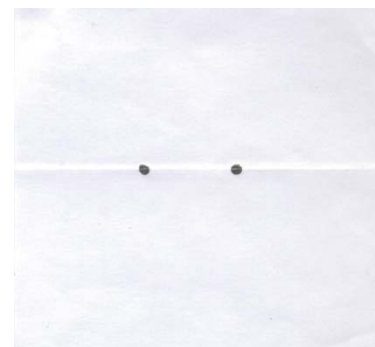


Ilustración 2: Material de Rosi 2.

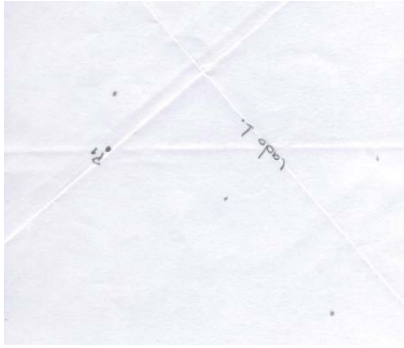


Ilustración 3: Material de Rosi 3.



Ilustración 4: Material de Rosi 4.

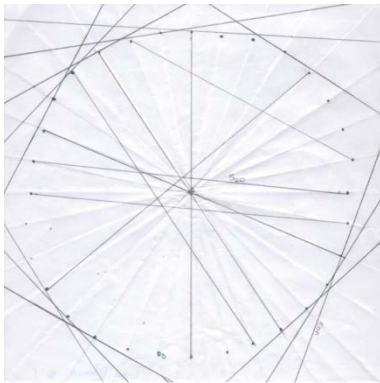


Ilustración 5: Material de Rosi 5.

Evolución del proceso de comprensión de Rosi

Para este análisis se retomaron los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, que se refinaron durante todo el trabajo de campo y que dieron cuenta del proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico mediante el doblado de papel. Una vez se enuncie el descriptor se narrará, grosso modo, cómo se desarrolló la estudiante en dicha acción.

Es fundamental resaltar que previo al desarrollo del trabajo de campo, se observó que los estudiantes exhibían carencias acerca del concepto de elipse. Incluso, se percibieron algunas dificultades en la comprensión de conceptos básicos de la geometría euclidiana, muchas de los cuales fueron superadas en el transcurso del estudio.

Nivel predescriptivo

- 0.1 Reconoce el axioma básico de la geometría euclidiana: “Por dos puntos pasa una única recta”.

En la encuesta, Rosi respondió que por dos puntos pasa una única recta y un solo doblez. Sin embargo, cuando se le preguntó en la entrevista individual sobre ¿cuántos dobleces pasan por dos puntos? Ella respondió sin reflexionar, que infinitos dobleces. Después se le presentó una actividad para indagarle sobre la construcción de un doblez, a la cual, ella respondió que por dos puntos pasa un solo doblez. Posteriormente, afirmó que por dos puntos pasa una sola recta.

- 0.2 Reconoce algunas nociones básicas de geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, distancia, perpendicular, tangente, entre otras.

Un punto, Rosi lo relacionó con un punto ubicado en el plano cartesiano, es decir, con una ubicación espacial. De hecho, la noción de plano geométrico, la relacionó con un plano cartesiano, donde se hacen gráficas de varios puntos. Ella parecía estar muy influenciada por la geometría analítica. Mientras que la recta la consideró como una “línea que no tiene continuo fin”. La forma como lo escribió en la encuesta, nos mostró que tenía el concepto, pero que le era difícil expresarlo con palabras, pues utilizó erróneamente dos términos importantes de la recta: continua y sin fin.

0.3 El estudiante relaciona un doblado con un segmento de línea recta.

Rosi, en la encuesta, no logró percibir explícitamente la relación entre un doblado y un segmento de línea recta. Sin embargo, se pudo afirmar que intuyó tal relación, ya que en la entrevista individual, ella logró establecer que por dos puntos pasa una sola recta o un solo doblado, y que por un punto pasan infinitas rectas y muchos dobleces. Eso nos llevó a aseverar que la estudiante logró establecer una analogía entre doblado y recta y empezó a percibir la noción de infinito.

0.4 Reconoce la congruencia de segmentos.

Rosi no logró establecer que dos segmentos son congruentes de forma explícita, pero sí logró determinar la igualdad de los segmentos. Por ejemplo, Rosi pudo hallar el punto medio de un segmento, llevando un punto extremo de un segmento sobre su otro punto extremo. Ella pudo establecer que los dos puntos “están como a la misma distancia” del punto medio.

0.5 Construye rectas perpendiculares.

En la encuesta, Rosi no reconoció el concepto de perpendicular, pues cuando escribió sobre éste, hizo alusión a la definición de rectas paralelas. La joven, durante la entrevista individual, argumentó que dos dobleces son perpendiculares si forman ángulos de 90 grados, pero no lo comprobó. También, ella pudo determinar que cuando se lleva un punto sobre otro, se genera un doblado perpendicular al segmento determinado por dichos puntos, pero tampoco lo comprobó.

0.6 Visualiza la suma de segmentos.

La estudiante pudo percibir la suma de segmentos, mediante el doblado de papel. Al principio, pudo visualizar que la suma de dos segmentos determinados \overline{NM} y \overline{MO} daba la constante r . Posteriormente, ella pudo visualizar, con base en la información suministrada y en una conversación de carácter socrático, la suma geométrica determinada por los segmentos \overline{MP} y \overline{MO} .

Nivel I: De reconocimiento visual

1.1 Realiza la construcción de la mediatriz de un segmento.

Rosi logró encontrar el punto medio de un segmento mediante el doblado de papel y, a su vez, con dicha construcción, pudo establecer la mediatriz de un segmento. Ella afirmó, en dos momentos distintos, que cuando se lleva un punto sobre otro punto, primero, se genera un doblado que pasa por el punto medio del segmento y, segundo, se genera un doblado que es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos.

1.2 Realiza la construcción de una circunferencia.

Rosi, en la encuesta, mostró que no reconocía el concepto de circunferencia. Pero después, en la entrevista individual, realizó la construcción de algunos puntos discretos de la circunferencia a través de un proceso de traslación de puntos que conservaran su distancia a un punto determinado O , mediante el doblado de papel. De acuerdo con eso, pudo determinar que todos los puntos trasladados equidistaban de O .

1.3 Realiza la construcción de una elipse.

Cuando se le presentó a Rosi, por primera vez, el proceso de construcción de la elipse (aún no se le había nombrado la figura): *se construyen dobleces que surgen de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que está en la región limitada por esta*, ella creyó que se generaba un hexágono. Posteriormente, cuando se le mostró la figura formada, explicó que no era una circunferencia, pero no mencionó a qué figura se le parecía.

1.4 Reconoce que el lugar geométrico construido mediante el doblado de papel es la elipse, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

1.5 Describe la figura construida en la hoja de papel como un todo, pero se le dificulta señalar las partes constitutivas fundamentales tales como: una mediatriz, una tangente, dos puntos fijos, entre otros.

Rosi no reconoció que el lugar geométrico que se construyó, cuando se realizaron dobleces que surgieron de llevar puntos de la circunferencia sobre un punto P que estaba en la región limitada por esta, era una elipse. Incluso, ella mencionó, en primer lugar, que si se realizaba la construcción, surgiría un hexágono y, posteriormente, cuando se realizó la construcción, determinó que no era una circunferencia y no mencionó sus propiedades, ni mucho menos si era posible asociarla con una figura geométrica conocida. Es decir, ella centró su atención en su forma como un todo, pero no señaló partes constitutivas.

Nivel II: De análisis.

- 2.1 Afirma que siempre que se lleve un punto sobre otro punto en una hoja de papel, se está construyendo la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

Rosi reconoció, en dos momentos distintos, que cuando se lleva un punto sobre otro punto, se realiza un doblez que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento determinado por dichos puntos. Cuando se le mencionó que era la mediatriz, ella siguió utilizando el concepto, pero con ciertas dificultades, pues en algunas partes de la entrevista dijo que la mediatriz era un punto M. También logró afirmar que si se coloca un punto sobre otro, se construye la mediatriz del segmento determinado por dichos puntos.

- 2.2 Establece que cualquier punto que pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

En el transcurso del diálogo socrático, Rosi logró establecer, en primer lugar, que si se ubica un punto sobre la mediatriz del segmento \overline{PQ} , este estará a la misma distancia de P y de Q. Posteriormente, logró afirmar que los puntos de la mediatriz tienen que estar a igual distancia de los extremos del segmento y, finalmente, afirmó que un punto está sobre la mediatriz si equidista de los extremos del segmento.

- 2.3 Afirma que los puntos de una circunferencia equidistan de un punto fijo llamado centro.

Rosi afirmó, en la construcción de los puntos discretos de la circunferencia, que todos los puntos trasladados equidistan del punto O. Luego, logró establecer que los puntos de una circunferencia deben estar a la misma distancia del centro.

- 2.4 Establece que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre su centro, se genera un conjunto de mediatrices las cuales envuelven a su vez otra circunferencia interior (concéntrica).

Cuando a Rosi se le presentó la construcción de una circunferencia envuelta que resulta de hacer dobleces que surgían de llevar puntos de la circunferencia sobre su centro, no dudó en afirmar que era una circunferencia. Sin embargo, no justificó tal afirmación y no se le insistió en que lo hiciera.

- 2.5 Asevera con seguridad que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos.

Rosi estableció que la mediatriz de un segmento es un lugar geométrico porque un punto está sobre ésta si equidista de los extremos del segmento. Para el caso de la circunferencia, la estudiante logró afirmar que los puntos de una circunferencia deben estar a la misma distancia del centro; posteriormente, estableció que la circunferencia es un lugar geométrico porque todos los puntos están a igual distancia del centro.

- 2.6 Determina que la elipse está formada por el conjunto de mediatrices construido y por dos puntos interiores fijos, uno de los cuales es el centro de la circunferencia.

Cuando se le presentó a Rosi la construcción de la elipse mediante el doblado de papel, explicó que no era una circunferencia y no mencionó propiedades ni partes constitutivas. Posteriormente, con base en el diálogo inquisitivo, ella logró establecer que la figura está envuelta por mediatrices, pero no logró determinar que hay dos puntos fijos.

- 2.7 Afirma que siempre que se hagan dobleces que surgen de llevar puntos de una circunferencia sobre un punto interior de ésta (distinto del centro) se genera una elipse.

Cuando se aborda la construcción de la elipse, Rosi explicó que no era una circunferencia y no mencionó propiedades o partes constitutivas. Sin embargo, después de ciertos aportes de información y de responder varias preguntas intencionadas, ella logró establecer que si se ubica un punto P en cualquier parte de la región limitada por una circunferencia y se llevan los puntos de esta sobre el punto P, se formaría otra elipse.

Nivel III: De clasificación

- 3.1 En la construcción de la elipse utiliza el hecho de la mediatriz como lugar geométrico, para establecer que la suma de dos segmentos determinados es el radio de la circunferencia.

Con base en el diálogo socrático y aportes de información, Rosi logró establecer que la suma geométrica de dos segmentos determinados $(\overline{MP} + \overline{MO})$ es igual a r , el radio de la circunferencia. Incluso logró establecerlo para varios puntos M del contorno de la figura, pero apoyada también en diálogos socráticos, porque le dio cierta dificultad encontrar este hecho, dado que esta suma requiere que el estudiante reconozca la propiedad que cumplen los puntos de la mediatriz y de un proceso de transitividad.

- 3.2 Establece, teniendo en cuenta que la mediatriz es un lugar geométrico, que un punto pertenece a la elipse si la suma de sus distancias a los dos puntos fijos es el radio de la circunferencia inicial.

Llegando al final de la entrevista individual, Rosi logró establecer, utilizando el concepto de mediatriz como lugar geométrico, que la propiedad que cumplen los puntos de la figura envuelta es “al sumar PM y MO ... que la suma nos da r ”. Ella afirma que si M “está sobre el contorno” la suma de \overline{OM} y \overline{MP} es: “ r , es constante”. Por lo tanto, ella logra concluir que para cualquier punto M de la figura, $\overline{MP} + \overline{MO}$ es r , el radio de la circunferencia y es una constante.

- 3.3 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la elipse como lugar geométrico: la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es una constante.

Rosi evocó la necesidad de llegar a la definición de la elipse como lugar geométrico. Además, afirmó que la elipse es un lugar geométrico porque los puntos cumplen una condición particular: “que la suma nos dé, o sea como r ”. Es importante anotar que no se logró la definición formal como tal, en tanto que éste no fue el objetivo del estudio.

Con base en el análisis anterior, Rosi posee el nivel III de razonamiento, debido a que ella comprendió el concepto de elipse como lugar geométrico. La entrevista individual no solamente sirvió para ubicarla en uno de los niveles de razonamiento, sino que le permitió avanzar en estos y lograr, mediante el diálogo inquisitivo, un avanzado nivel, que es el más alto en nuestra caracterización de la comprensión.

Algunas características de la entrevista individual de Rosi

A continuación, se presentan algunas características de la entrevista individual de Rosi, considerando el decálogo de Jaramillo, Londoño & Jurado (2012).

El lenguaje: el lenguaje utilizado por el estudiante es un factor determinante para detectar el nivel en el que está razonando. A medida que Rosi avanzaba en su nivel de razonamiento, se podía detectar un lenguaje más refinado, en tanto incorporaba los nuevos conceptos a su red de relaciones y los utilizaba con mayor confianza. Ella logró comprender los conceptos de mediatriz y de circunferencia como lugares geométricos y, posteriormente, tuvo que utilizarlos para diferenciar la elipse de una circunferencia y determinar la propiedad que deben cumplir los puntos que pertenecen a la elipse, usando el concepto de mediatriz.

Pensamiento discursivo: algunas preguntas de nuestra entrevista se hicieron varias veces, para verificar que el estudiante había logrado respuestas más elaboradas, porque había extendido su red de relaciones. Cuando se le preguntó por primera vez a Rosi por la suma de los segmentos \overline{OM} y \overline{MP} , exhibió cierta dificultad para comprender que su suma es la constante r , pero pudo determinarlo gracias al diálogo inquisitivo sostenido con ella. Posteriormente, se le preguntó por esta suma de segmentos, pero en una situación diferente y, rápidamente, ella señaló la respuesta correcta. En otras situaciones, también pudo determinar que la suma era r , el radio de la circunferencia, con la que se había iniciado la construcción de la figura.

Problematización con las ideas: algunas preguntas de nuestra entrevista pueden provocar que el entrevistado ingrese en un estado de contradicción interna o de confrontación con las ideas que ya tenía y las nuevas que le llegan. Rosi vivió momentos en los que se sintió realmente confundida e, incluso, lo manifestó. Por ejemplo, cuando se le preguntó si la mediatriz era un lugar geométrico, ella iba tratando de hilar las respuestas de las preguntas inquisitivas que se le hacían en el diálogo socrático que se entabló con ella, pero hubo un momento en el que se sintió confundida y exclamó: “Hay... Me confundí...”. Cuando se le pregunta por primera vez por la suma de los segmentos \overline{OM} y \overline{MP} y después de entablar con ella un diálogo inquisitivo, ella expresa confundida: “Hay Dios...”. Y cuando ella logró establecer que la suma de dichos segmentos era r , el radio de la circunferencia, dijo: “es que no sé cómo explicarlo...”. Ella misma afrontó que se sentía confundida y fue necesario acudir a los diálogos socráticos, con aportes de información y preguntas intencionadas, para que pudiera salir de sus dificultades conceptuales.

El paso por los tres momentos: en algunas situaciones de la entrevista, el entrevistado pasa por tres momentos: creer saber la respuesta, darse cuenta que no sabe y, por último, al estar en un conflicto interno siente la necesidad de encontrar la verdad. Rosi también experimentó, en algunos períodos de la entrevista, esos tres momentos. Por ejemplo, en la suma de los segmentos $\overline{MP} + \overline{MO}$, que era el radio, ella llegó a la conclusión que era la medida del segmento \overline{OP} , el correspondiente al tercer lado del triángulo formado por los puntos M, P y O. Posteriormente, se dio cuenta que no sabía y se sintió confundida; incluso lanzó la expresión: “Hay Dios...” y, finalmente, con la ayuda de algunas preguntas inquisitivas, logró llegar a la respuesta: “Que me suma, pues r ... Porque si este está a la misma distancia que este, y al sumar este y este me da la constante r , y... entonces al sumar este y este... da r también”.

La red de relaciones: las preguntas de nuestra entrevista se diseñaron de tal modo que el estudiante pudiera construir una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, a través de la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel y los conceptos concretos de mediatriz y de circunferencia. Rosi, en el transcurso de la entrevista, exhibió un lenguaje más refinado y se evidenció, de acuerdo a las respuestas brindadas, que había logrado involucrar los conceptos de mediatriz, circunferencia, lugar geométrico y elipse a su red de relaciones. Por ejemplo, cuando se le preguntó por la propiedad que deben cumplir los puntos para pertenecer a una circunferencia, ella respondió: “Para pertenecer a una circunferencia... Que estén a la misma distancia del centro...”. O cuando se le preguntó por segunda vez la suma de los segmentos \overline{OM} y \overline{MP} , ella respondió: “OM y MP, pues igual vuelve y me da r , porque si esto es la mediatriz, sería igual distancia, y esto está a igual distancia de este...”

Entrevista refinada²

Después del proceso de refinación que sufrió la entrevista durante la investigación, el guion, finalmente, se consolidó con treinta y una (31) preguntas y cuatro (4) aportes de información. Es importante señalar que esta entrevista no es de carácter lineal, sino de carácter espiral, dado que es necesario retomar los conceptos y las habilidades logradas en preguntas anteriores. Además, la respuesta correcta a una pregunta no determina el nivel en el que está razonando un estudiante; es el conjunto de preguntas el que nos permite llegar a esta conclusión. A continuación, presentamos algunas de las preguntas del guion de entrevista final.

² Las construcciones que se presentan en el artículo fueron elaboradas con el programa de Geometría Dinámica R y C, con el fin de facilitar la visualización de los hechos geométricos, dado que simulan el mosaico de pliegues producto del doblado de papel.

Considera dos puntos en una hoja de papel, ¿cuántos dobleces crees que pasan por dichos puntos?

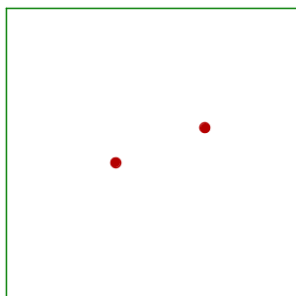


Ilustración 6: Pregunta 1.

Mediante el doblado de papel, ¿cómo determinarías el punto medio del segmento trazado en la hoja?

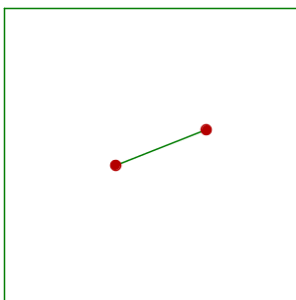


Ilustración 7: Pregunta 2.

Se marcan dos puntos en una hoja de papel. Si se lleva un punto exactamente sobre el otro punto, ¿qué relación encuentras entre el doblez hecho y el segmento que une los dos puntos?

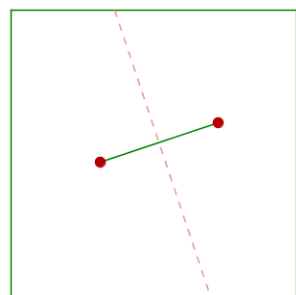


Ilustración 8: Pregunta 3.

De acuerdo con la figura, ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos \overline{RN} y \overline{RP} ? ¿Por qué?

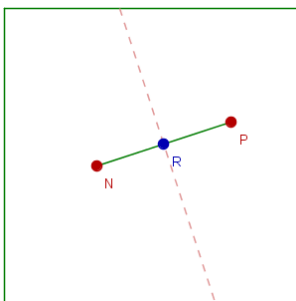


Ilustración 9: Pregunta 4.

¿Crees que el doblez que se hace cuando se lleva el punto N sobre el punto P es perpendicular al segmento \overline{NP} ? ¿Por qué?

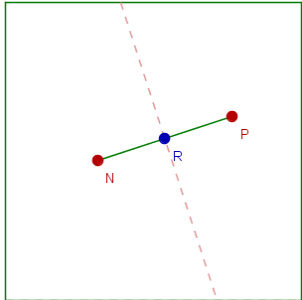


Ilustración 10: Pregunta 5.

Aporte de información:

Se llama mediatriz a la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

Considera un punto M, diferente del punto medio R, sobre la mediatriz del segmento \overline{NP} , ¿qué puedes decir acerca de las medidas de los segmentos \overline{MN} y \overline{MP} ? ¿Por qué?

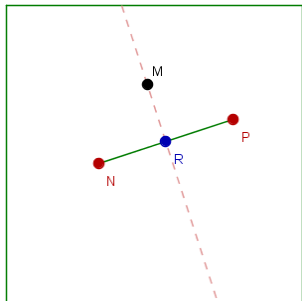


Ilustración 11: Pregunta 6.

Aporte de información:

Un punto equidista de otros dos puntos si está a una misma distancia de estos.

¿Cualquier punto que esté sobre la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos? ¿Por qué?

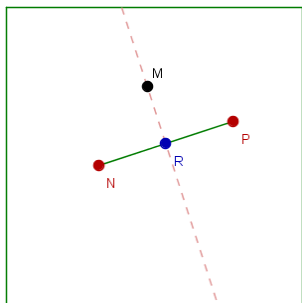


Ilustración 12: Pregunta 7.

Aporte de información:

Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad.

¿Es la mediatriz de un segmento cualquiera, un lugar geométrico? En caso afirmativo, ¿cuál es la propiedad que cumple el conjunto de puntos para pertenecer a este lugar geométrico?

Considera tres puntos N, P y O cualesquiera en una hoja de papel y se construye la mediatriz del segmento \overline{NP} . Luego, considera el punto M como la intersección del segmento \overline{NO} con la mediatriz.

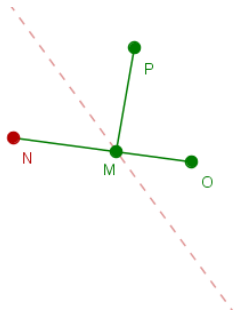


Ilustración 13: Pregunta 9.

Sea r la medida del segmento \overline{NO} , que es igual a la suma de las medidas de los segmentos \overline{NM} y \overline{MO} , ¿qué podrías afirmar acerca de la suma de las medidas de los segmentos \overline{MP} y \overline{MO} ?

Este conjunto de puntos permite intuir la noción de circunferencia, ¿qué propiedad cumplen estos puntos?

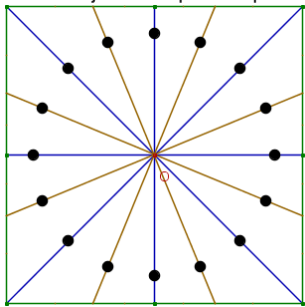


Ilustración 14: Pregunta 10.

La siguiente figura es el resultado de construir dobles que surgen de llevar los puntos de la circunferencia sobre el punto P. ¿Crees que la figura envuelta por el conjunto de mediatrices es una circunferencia? ¿Por qué?

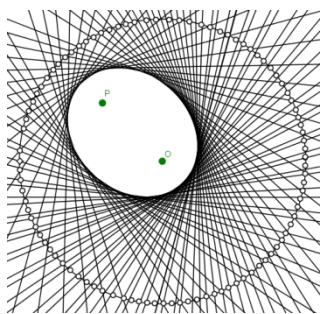


Ilustración 15: Pregunta 11.

Considere una circunferencia con centro O, radio r y un punto P que está en la región limitada por dicha circunferencia. En esta se realiza el siguiente proceso:

Se ubica cualquier punto N de la circunferencia.

Se resalta el dobles que se forma cuando se pone el punto N sobre el punto P.

Se traza el segmento \overline{NO} y se nombra M al punto de intersección entre \overline{NO} y la mediatriz del segmento \overline{NP} .

Se traza el segmento \overline{MP} .

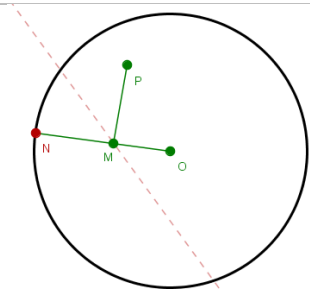


Ilustración 16: Pregunta 12.

Si se realiza este proceso en la figura construida anteriormente, ¿se podría afirmar que el punto M pertenece a la figura envuelta por las mediatrices? ¿Por qué?

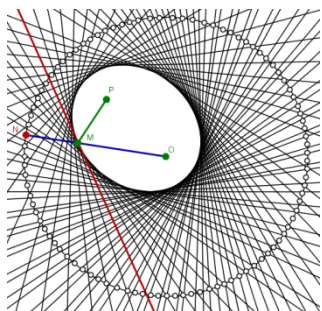


Ilustración 17: Pregunta 12.

Sabiendo que r es el radio de la circunferencia ¿cuál es el resultado de sumar las medidas de los segmentos \overline{OM} y \overline{MP} ? ¿Por qué?

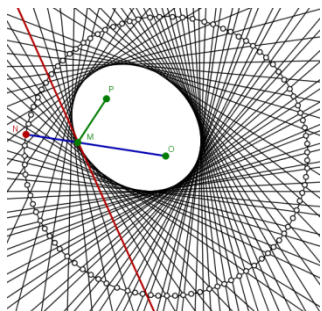


Ilustración 18: Pregunta 13.

Si se marca un punto cualquiera N sobre la circunferencia y se realiza de nuevo el proceso, ¿es posible afirmar que el resultado de sumar las medidas de los segmentos \overline{OM} y \overline{MP} es el radio de la circunferencia? ¿Por qué?

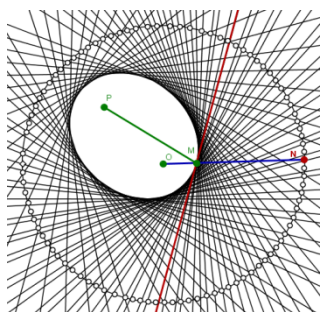


Ilustración 19: Pregunta 14.

Si M es un punto que pertenece al contorno de la figura, ¿es posible afirmar que la suma de sus distancias a los puntos específicos O y P es una constante? ¿Por qué?

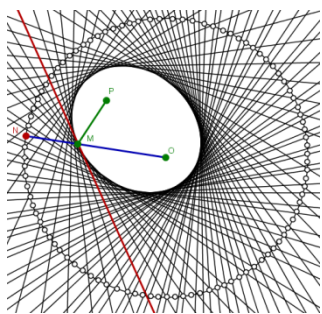


Ilustración 20: Pregunta 15.

Aporte de información:

La figura envuelta por el conjunto de mediatrices construido, recibe el nombre de elipse.

¿Es la elipse un lugar geométrico? ¿Por qué?

Conclusiones

Los descriptores finales de cada nivel se lograron consolidar al ser refinados durante el trabajo de campo. Su importancia radica en que nos permitieron caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes abordados en el estudio de casos y descubrir el nivel final en el que se encontraban razonando. Es decir, el proceso investigativo permitió establecer las principales características del razonamiento en cada uno de estos niveles, con respecto al concepto de elipse como lugar geométrico. El paso del estudiante por el guion de entrevista de carácter socrático cumplió una doble funcionalidad, de un lado le permitió avanzar en su nivel de razonamiento y de otro, se constituyó en una experiencia de aprendizaje para el estudiante. De hecho, cuatro de los cinco estudiantes quedaron en el nivel III.

En el transcurso de la entrevista y de acuerdo con las respuestas ofrecidas por los estudiantes, en la perspectiva de Van Hiele, el lenguaje cumplió un papel importante, en tanto que se consideró la manera cómo se expresaban, sus gestos, su vocabulario, entre otros aspectos. Esto permitió analizar su evolución en el nivel de razonamiento a medida que respondían cada una de las preguntas del guion, manifestando una ampliación de su red de relaciones, lo que posibilitó que su estructura mental sea más rica en relaciones significativas. Así que, el espíritu de la entrevista es sostener un diálogo discursivo e inquisitivo, con el propósito de que cada estudiante exhiba su nivel de razonamiento y permita, de acuerdo con descriptores consolidados, caracterizar dichos procesos de manera individual.

Las actividades planteadas a los estudiantes, en el guion de entrevista, se basaron en la visualización de construcciones geométricas hechas mediante el doblado de papel, es decir, el razonamiento de los estudiantes se basaba en una componente de tipo visual-geométrica inherente de la geometría del doblado de papel. Estas situaciones fueron nuevas para los estudiantes y, con base en ciertos aportes de información y en sus experiencias previas, ellos lograron llegar a conclusiones realmente sorprendentes (como llegar al hecho de que tanto la mediatriz como la circunferencia son lugares geométricos), lo que finalmente les permitió comprender el concepto de elipse como lugar geométrico.

Por lo tanto, podemos concluir que la entrevista cumplió con las diez características propuestas por Jaramillo, Londoño & Jurado (2012): intencionalidad, lenguaje, conceptos básicos, experiencias previas, diálogo inquisitivo, pensamiento discursivo, aportes de información, problematización con las ideas, paso por los tres momentos y construcción de la red de relaciones respectiva.

Referencias

- Cruz, L. & Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Educación*, (97), pp. 14 – 21.
- De la Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, (24), pp. 99 – 121.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.
- Jaramillo, C. & Campillo, P. (2001). Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del Modelo de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9 (1), 65 – 84.
- Jaramillo, C.; Londoño, R. & Jurado, F. (2012). *Una metodología alternativa para la comprensión de la noción de límite*. Alemania: Editorial Académica Española.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. En: *Pensamiento y Gestión # 20*. Universidad del Norte. p. 165 – 193.
- Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia. Medellín.