



Cómo citar el artículo

Muñoz Mesa, L. M.; Londoño Orrego, S. M.; Jaramillo López; C. M. & Villa-Ochoa, J. A. (2014). Contextos Auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 42, 48-67. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/download/494/1028>

Contextos auténticos y la producción de modelos
matemáticos escolares¹

Authentic Contexts and the Production of School
Mathematical Models

Contextes authentiques et la production de modèles
mathématiques scolaires

1. Este artículo se deriva del proyecto de Investigación: "Modelación Matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables". El proyecto se desarrolló en la Universidad de Antioquia - Maestría en Educación. El proyecto se desarrolló entre febrero de 2008 y junio de 2011.



Lina María Muñoz Mesa

Licenciada en Matemáticas y Física

Magíster en Educación (Área de Educación Matemática)

Docente de la Facultad de Educación Universidad de Antioquia

Integrante del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (UdeA - Eafit)

Integrante Grupo MATHEMA-Formación en Investigación en Educación Matemática

lina.munoz@udea.edu.co

Sandra Milena Londoño Orrego

Licenciada en Matemáticas y Física

Magíster en Educación (Área de Educación Matemática)

Docente de la Facultad de Educación Universidad de Antioquia

Integrante del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (UdeA - Eafit)

Integrante Grupo MATHEMA-Formación en Investigación en Educación Matemática

sandra.londonoo@udea.edu.co

Carlos Mario Jaramillo López

Licenciado en Matemáticas Universidad de Medellín

Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia

Profesor Titular del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia

Coordinador del Grupo de Investigación: Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit)

cama@matematicas.udea.edu.co

Jhony Alexander Villa-Ochoa

Licenciado en Matemáticas y Física

Especialista en Enseñanza de las Matemáticas

Magíster en Educación (Área de Educación Matemática)

Doctor en Educación (Área de Educación Matemática)

Profesor Asociado de la Facultad de Educación Universidad de Antioquia

Coordinador Grupo MATHEMA-Formación en Investigación en Educación Matemática

jhony.villa@udea.edu.co

Tipo de artículo: Investigación e innovación

Recibido: 30 de marzo de 2014

Evaluated: 21 de abril de 2014

Aprobado: 29 de abril de 2014

Resumen

En este artículo se presentan algunos resultados de un estudio de caso cualitativo realizado con estudiantes de grado once de Educación Media (16-18 años). La investigación indagó por los diferentes modelos matemáticos que surgen de un contexto propio de los estudiantes: "El Sistema de transporte masivo Metro de Medellín". La discusión se presentó en términos de las relaciones entre los elementos que emergen al trabajar en el aula con situaciones en contextos auténticos y un proceso de modelación matemática. Fundamentamos algunos resultados tales como: contexto auténtico como desencadenador de una mirada crítica, experimentación en modelación: uso libre de estrategias matemáticas, producción de modelos matemáticos desde relaciones retóricas a relaciones simbólicas, evidenciándolos en episodios de situaciones relacionadas con el álgebra escolar. Este estudio sugiere que cuando se reconocen los contextos auténticos de los estudiantes como insumos para desarrollar actividad matemática escolar, no solo hay participación y empoderamiento en aspectos como la toma de datos, producción de modelos y significados, sino que también se presenta una mayor comprensión de los fenómenos asociados al contexto mencionado; por tanto, el papel del contexto no es neutro cuando se modela matemáticamente sino que por el contrario puede articularse a las matemáticas escolares a través de un proceso de producción de modelos.

Palabras clave

Contextos auténticos, Modelación matemática educativa, Modelos matemáticos, Relaciones lineales entre variables.

Abstract

This article presents some results derived from a qualitative case study performed with students of the last year of high school (16-18 years old). The research focused on the different mathematical models resulting from student contexts "The Metro of Medellín Transportation System". The discussion is presented in terms of the relations between the elements which appear when working in the classroom with real context situations and a mathematical modeling process. We present foundations of some results such as: authentic context as promoter of a critic look, experimentation in modeling, free use of mathematical strategies, and production of mathematical models from rhetoric relations to symbolic relations, which become evident in events of situations related to school algebra. This study suggests that when authentic student contexts

are identified as a material for developing school mathematics there is empowering-participation in aspects such as data collection, model and meaning production and also there is a better understanding of phenomena associated to this context, therefore, the role of the context is not neutral when mathematically modeling but it can be linked to school mathematics through a model production process.

Keywords

Authentic contexts, Educational mathematical modeling, Mathematical models, linear relations between variables.

Résumé

Dans cet article on présente quelques résultats d'une étude de cas qualitatif réalisé avec étudiants de la dernière année d'enseignement secondaire (16-18 ans). On a recherché au sujet des différentes modèles mathématiques qui se dérivent d'un contexte propre des étudiants « le système de transporte massif Metro de Medellín ». La discussion est présentée en termes des relations entre les éléments qui se dérivent quand on travaille dans les salles de classe avec des situations en contextes authentiques et un procès de modelage mathématique. Nous fondons quelques résultats comme : contexte authentique comme un élément pour déchaîner un regard critique, expérimentation dans modelage : usage libre des stratégies mathématiques, création de modèles mathématiques de relations rhétoriques aux relations symboliques, en vérifiant dans épisodes de situations liées à l'algèbre scolaire. Cette étude suggère que, quand on reconnaît les contextes authentiques des étudiants comme matériels pour développer activité mathématique scolaire, non seulement il y a participation et empouvoirement dans aspects comme la prise de données, la création de modèles et significations mais aussi on présente une meilleur compréhension des phénomènes liés au contexte déjà mentionné ; par conséquent, le rôle du contexte n'est pas neutre quand on modèle mathématiquement mais au contraire il peut s'articuler aux mathématiques scolaires à travers d'un processus de production de modèles.

Mots-clés

Contextes authentiques, modelage mathématique éducatif, modèles mathématiques, relations linéales entre variables.

Introducción

En nuestro interés por observar y comprender las diferentes dimensiones de la realidad escolar, nos preocupamos por las características de las tareas, situaciones, problemas y, en general, los medios que pueden usarse en el aula de clase para desarrollar la actividad matemática. Es así como desde nuestra interpretación de los trabajos de Borba y Villarreal (2005) encontramos que tales situaciones, problemas y medios usados condicionan las maneras en que se produce las matemáticas y, por tanto, las visiones sobre las mismas. Por ejemplo, si la actividad matemática escolar se centra solo en el planteamiento de problemas en el campo mismo de las matemáticas con el objetivo de aprender y aplicar definiciones y propiedades, se pueden desatender los aspectos relacionados con la comprensión e interpretación de los estudiantes sobre el mundo que les rodea. Esta idea puede ser considerada en los fines formativos de la matemática escolar que aporte a la formación de un estudiante capaz de participar de manera activa en la sociedad y la cultura (Aravena et al., 2007, Blum y Borromeo-Ferri, 2009).

Según Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007) la investigación en Educación Matemática ha generado evidencia suficiente para mostrar que no existe una transferencia automática de las matemáticas abordadas en forma teórica o abstracta en el aula de clase hacia una comprensión de los diferentes fenómenos de la "realidad". En coherencia con estos resultados, es importante reconocer que la actividad matemática escolar debe prestar atención no solo al desarrollo de habilidades y a la manera como se puede producir aspectos conceptuales y significados de las matemáticas, sino también a los contextos en los cuales esta actividad se desarrolla; de ese modo, el estudio de contextos y su modelación se convierten en aspectos relevantes para la investigación en Educación Matemática.

En este artículo nos proponemos presentar los resultados de una investigación que tuvo en cuenta algunos aspectos en el ámbito escolar, social y personal de un conjunto de estudiantes y la manera en que estos aspectos pudieron influenciar en el proceso de producción de modelos matemáticos. Centramos nuestra atención en buscar evidencia que nos permitiera generar respuesta a la pregunta ¿De qué manera un proceso de modelación matemática permite a estudiantes construir relaciones lineales entre dos variables mediante situaciones en contextos auténticos? A partir de este interrogante desarrollamos un análisis de los contextos, las nociones matemáticas involucradas y el proceso de modelación matemática, teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes cuando se enfrentaron al estudio de fenómenos asociados a un contexto cercano a su cotidianidad.

Algunos antecedentes en la literatura

Los contextos en la Educación Matemática

Hoyles, Skovsmose, Kilpatrick, en colaboración con Valero (2005) llaman la atención sobre las implicaciones que puede tener la descontextualización de las matemáticas escolares de las prácticas sociales; estos autores resaltan la importancia de las formas de conceptualización en la escuela desde procesos de significación y no sólo desde las definiciones formales; afirman que no hay duda que una característica de las matemáticas ha sido el desarrollo de los cálculos que permitan la manipulación de símbolos "sin sentido". Sin embargo, reconocen el papel de las situaciones, del contexto y de las prácticas culturales en relación con una significación gradual sobre los conceptos matemáticos.

La modelación matemática es uno de los dominios de investigación que, al interior de la Educación Matemática, asume como objeto de estudio las relaciones entre los contextos, situaciones propias de la cultura y de las demás ciencias con la matemática. El uso de contextos en la Educación Matemática ha llamado la atención

de diversidad de investigadores en la Disciplina; sin embargo, no todos ellos están inscritos en alguna de las líneas o perspectivas de la modelación matemática. Por ejemplo, Ramos y Font (2006) retoman el trabajo de Martínez (2003) para presentar una clasificación sobre las diferentes acepciones y usos del término contexto, a saber: *Contexto real*, según los autores, este contexto se refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar. *Contexto Simulado*, el cual tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características (por ejemplo, cuando los alumnos simulan situaciones de compra-venta en un “rincón” de la clase. Finalmente estos autores señalan el *contexto evocado* el cual se refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.

Beswick (2011) señala que en la literatura internacional el uso de tareas contextualizadas en el aula de clase se justifica en al menos cinco aspectos, a saber: (1) fines utilitarios que incluyen el cumplimiento de las necesidades económicas de la sociedad; (2) el uso de las matemáticas para mejorar la comprensión de los estudiantes de temas importantes; (3) mejorar la comprensión de los estudiantes de conceptos matemáticos; (4) intensificar la mutua apreciación de los estudiantes a la naturaleza de las matemáticas; y, (5) mejorar el afecto de los estudiantes hacia las matemáticas.

Por su parte, Valero (2002) conceptualiza sobre tres categorías de contexto: *El contexto de un problema* relacionado con las nociones y procedimientos matemáticos en los que se inscribe y en las referencias que la formulación del problema genera en el estudiante; el *contexto de interacción* referido a la manera cómo se abordan los problemas mediante la cooperación entre participantes, como también a sus referencias matemáticas y de la vida real; el *contexto situacional* correspondiente a las formas de uso y de llegar a conocer las matemáticas, las relaciones históricas, sociales, culturales y psicológicas, entre otras, constitutivas del aprendizaje. Estas categorías aportan desde una mirada global sobre las diferentes esferas en las que se encuentra involucrada la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero diferenciada sobre los límites en cada una de ellas.

En el marco del estudio desarrollado, los estudiantes estuvieron considerados en el centro de los procesos implicados, en la delimitación del *contexto/fenómeno o problema, lo situacional, la interacción*; fue así como nuestro interés se focalizó en la manera cómo los estudiantes se relacionaron con fenómenos sociales, culturales, políticos, económicos, escolares, entre otros. Estos fenómenos no fueron estáticos sino que reconocieron la dinámica misma de la realidad y los procesos conjuntos de construcción humana; ellos se mostraron susceptibles de ser materializados en situaciones concretas de aula. Frente a estas ideas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Colombia, 2006) plantean que:

Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos (p.72).

En el aula, las situaciones de aprendizaje deberían estar en concordancia con los intereses y vivencias de los estudiantes. De ahí que, una situación de aprendizaje pueda llegar a ser interpretada o construida de acuerdo a diversos modos de relación que establecen los estudiantes con la situación tratada.

Todo lo anterior pone de relieve la importancia de generar espacios para que el profesor, y otros agentes educativos, puedan reflexionar a nivel epistemológico, teórico, metodológico sobre los usos de los diferentes contextos en la articulación con la matemática escolar, pero sobre todo, las oportunidades y limitaciones que se imponen frente a tal articulación. En este sentido, no solo como investigadores sino también como profesores en ejercicio de los diferentes niveles educativos observamos en la modelación matemática escolar una manera de posibilitar que la producción matemática de los estudiantes tenga en cuenta la “comprensión de mundo” construida por ellos hasta ese momento. Por tanto, centramos nuestra atención en la creación de un espacio en el que los estudiantes puedan ver las matemáticas dinamizadas por procesos y situaciones de modelación

matemática in situ, que ellos inicien un desarrollo de conceptos mediante situaciones en contextos; es decir, realísticos, auténticos. En el siguiente apartado, nos dedicaremos a caracterizar la modelación matemática escolar y presentar algunas reflexiones sobre sus implicaciones en el aula de clase.

Aspectos relativos a la modelación matemática

Específicamente, cuando nos referimos a la modelación matemática, en el ámbito educativo estamos reconociendo la importancia de desarrollar situaciones en contextos extra-matemáticos. Tales situaciones han de posibilitar el reconocimiento de las ideas previas de los estudiantes e iniciar procesos matemáticos como el análisis, la interpretación y la representación, los cuales emergen de sucesos sociales, escolares y en general de circunstancias que involucran al estudiante. En ese sentido, consideramos que el uso de tales situaciones y contextos, más allá de ser un agente motivador o ilustrador de las utilidades de la matemática, ofrece un referente para la producción de matemáticas por parte de los estudiantes, es decir, los contextos se constituyen en maneras mismas de dar significado a las matemáticas. Estas consideraciones son coherentes con los planteamientos del Ministerio de Educación de Colombia cuando señala que:

El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas. (Colombia, 2006, p. 41).

Esta afirmación sugiere la idea de contextos incluidos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y de la modelación como una ambiente para ello, no sólo como aplicación de los conceptos, sino como una plataforma permanente; generadora de conexiones, interpretaciones, intereses, necesidades, problemas afines a los conceptos matemáticos, además de la construcción de argumentos que validen los modelos construidos con relación al contexto.

Algunas descripciones más generalizadas de la modelación matemática hacen alusión a un proceso en el cual se relaciona dos mundos, el "mundo real" y el "mundo matemático". Según Araújo (2007, 2009) este tipo de consideraciones presentan una dicotomía bastante discutible, puesto que presenta a las matemáticas como una "abstracción" que no hace parte de la realidad. Para la autora, es claro que este tipo de discusiones están basadas en principios filosóficos divergentes que, según ella, se fundamentan en visiones "platónicas" o "formalistas" de las matemáticas. Atendiendo a estas cuestiones la autora concluye que si la relación entre matemática y realidad se inspira en el platonismo, la modelación matemática se vería como una manera de describir, a través de la matemática, una realidad preexistente; si, por el contrario, fuera inspirada en el formalismo la modelación podría entenderse como el uso de alguna teoría formal existente (o la construcción de una nueva teoría) para actuar en un problema de la realidad.

Las reflexiones frente a esas relaciones entre las matemáticas y la realidad permitieron que en el transcurso del desarrollo de este estudio, observar la modelación matemática como un aspecto fundante de la actividad matemática y, por tanto, no es ajena ni disyunta de los contextos en los cuales se produce.

La noción de realidad en la modelación matemática entendida como un *sistema* que observa, desde múltiples dimensiones, los fenómenos o contextos fue presentada por Villa-Ochoa, Bustamante y Berrío (2010) quienes, sin agotar la idea de realidad en los aspectos extra-matemáticos, delimitan su interés por las *situaciones asociadas a los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes y de la escuela* como el punto en el cual la modelación matemática tiene su génesis. Este interés es justificado por los autores en las maneras flexibles que debe adquirir la modelación para que pueda atender a las diferentes demandas sociales que se les han impuesto a las matemáticas escolares. En estos contextos, se espera que los estudiantes se enfrenten a diferentes aspectos de la modelación como lo son la identificación y manipulación de datos, y a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución (Villa-Ochoa et al., 2009)

En consonancia con la postura de Villa-Ochoa y sus colaboradores, los contextos son asumidos como punto de partida de la modelación matemática, de ese modo, no sólo son asumidos desde otras ciencias, sino que también deben integrar las prácticas y saberes de una comunidad y su propia cultura. Este tipo de contextos cercanos a la realidad del estudiante, y que denominamos “auténticos”, sugieren prácticas en las que se involucran elementos matemáticos, que deberían ser promovidos para la construcción de saberes y significados en las aulas de clase. En términos de Niss (1992, citado en Kaiser y Schwarz, 2010) los *problemas auténticos* serán reconocidos por las mismas personas que pueden solucionarlos en su trabajo diario.

En relación con la denominación tareas y contextos “auténticos”, Beswick (2011) señala que en Educación Matemática este tipo de tareas refleja una semántica afín al término “situado” en el sentido que son tareas en las cuales no existe un algoritmo predeterminado para su solución y que, además, su presentación no se agota en una expresión verbal que provee una mínima información extra-matemática. De ese modo, las actividades que se adjetivan como auténticas exigen juicios y el uso de conocimientos para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana (Ben-Chaim; Ilany; Keret; 2008, p. 133).

Kaiser y Schwarz (2010) han señalado una razón central para recurrir a los problemas auténticos en la modelación matemática, la cual tiene que ver con la convicción de que los estudiantes necesitan experimentar el poder de los modelos matemáticos para la comprensión y solución de los problemas cercanos a su realidad y que les sea significativo a muchas personas de tal manera que puedan tener mayores argumentos para estar convencidos de la utilidad de las matemáticas y modelos matemáticos para su vida real.

El estudio

Conforme mencionamos en el apartado anterior, este estudio prestó especial atención a la manera en que la modelación matemática permite la construcción de relaciones lineales en contextos auténticos. Este propósito demandó de los investigadores estar atentos a los diferentes aspectos que influían en las reflexiones y producciones matemáticas de los estudiantes, en particular, nos exigió profundizar en los elementos que tales contextos imponían a dichas producciones; por tal razón, elegimos el estudio de casos como método de investigación.

El estudio lo desarrollamos entre enero de 2010 y junio de 2011 y en él participó un conjunto de nueve estudiantes de último grado de escolaridad en el Nivel de Educación Media (15-18 años). Los estudiantes construyeron modelos matemáticos relacionados con los fenómenos asociados al Sistema de Transporte Masivo Metro de Medellín. El estudio de casos lo fundamentamos desde la perspectiva de Hays (2004), quien concibe este método como aquel que se centra en examinar, buscar y explorar las nuevas experiencias e interacciones que no han sido comprendidas por las personas, desde una pregunta que focaliza el análisis del investigador. Este tipo de estudio permitió la producción de descripciones e interpretaciones en forma única y reflexiva en un corto período de tiempo. Desde esta mirada, focalizamos este estudio en la caracterización particular y no general, de diversas maneras de relacionar dos variables en el proceso de modelación matemática.

Elegimos a los nueve participantes atendiendo a sus habilidades comunicativas, gusto e interés por el área de matemáticas; asimismo, tuvimos en cuenta la pregunta de investigación puesto que consideramos que estos criterios favorecieron la interpretación, argumentación matemática e interacción con las actividades de modelación.

La recolección de los datos fue realizada en once sesiones o encuentros presenciales de discusión, durante un semestre. La información la recolectamos a través de tres fuentes: diez observaciones directas (grupales), tres entrevistas semi-estructuradas (grupales) y cinco documentos escritos (individuales). El trabajo de campo de esta investigación la abordamos en seis momentos que corresponden a diferentes actividades relacionadas con el proceso de modelación.

Momento uno: lo desarrollamos en dos sesiones de dos horas con la intención de acercar al estudiante al contexto del Metro de Medellín. En el desarrollo de este momento, involucramos a los estudiantes en la situación a través de una lectura, preguntas y un video sobre el contexto. La metodología utilizada en este momento, estuvo basada en el trabajo inicialmente individual y luego una socialización con el grupo, con miras a reconocer en los estudiantes sus habilidades para comunicar las ideas, sus formas de argumentar e interpretar.

Momento dos: en este momento decidimos evaluar las nociones previas sobre las formas de asumir las ecuaciones, funciones, representación de gráficas, tablas y otros elementos que se generaron de manera intencionada. Su duración fue de tres sesiones cada una de dos horas. Las preguntas planteadas estuvieron orientadas a desarrollar, a partir de cantidades conocidas y desconocidas, las nociones de “variable”, “constante” y dependencia, es decir, propusimos situaciones específicas de tipo aritmético que conllevaron a planteamientos de tipo algebraico.

Momento tres: lo implementamos en tres sesiones de dos horas. Este momento estuvo mediado por la pregunta: *¿Por qué el sistema de transporte masivo Metro es conveniente o no para ti como individuo que forma parte activa de la ciudad de Medellín?* En este momento pusimos especial atención a las estrategias de los estudiantes empleadas al analizar la esta pregunta y en las maneras que ellos determinaron para recoger los datos y solucionarla.

Momento cuatro: lo desarrollamos en una sesión de cuatro horas, la focalizamos en la interpretación y utilización de los datos, para dar respuesta al problema propuesto a los estudiantes. Esta solución al problema la abordamos mediante la actividad de responder una carta, en el cual exponíamos tres situaciones diferentes que daban cuenta de los análisis y tratamiento dado por los estudiantes a los datos recolectados.

Momento Cinco: Este momento lo implementamos en una sesión de cuatro horas, en la cual buscamos explicitar los modelos desde diferentes representaciones matemáticas y determinación de relaciones lineales desde el análisis de una valla publicitaria.

Momento Seis: Este último momento lo desarrollamos a través de una exposición de dos horas. En este momento el objetivo fue recoger la experiencia y la producción de los estudiantes e investigadores considerando la siguiente situación: *“En el Colegio Finca La Mesa hay varios estudiantes de otros lugares fuera de Medellín como Bogotá, el Cauca, Urabá y otros pueblos de Antioquia, ellos quisieran saber sobre las diferentes formas de movilización en la ciudad, costos, formas de ahorro y cuál de las opciones les conviene. Por esto motivo, requerimos de tu ayuda para dar respuesta a estas inquietudes”*. Por último, efectuamos un conversatorio con los asesores e investigadoras con el fin de conocer los avances del proceso desarrollado durante el semestre.

En nuestro proceso de análisis e interpretación de los datos atendimos a las consideraciones de Hays (2004) sobre la importancia de realizar la búsqueda de relaciones y el hilo conductor de todo el proceso, proporcionando el sentido y significado entre los datos recolectados, sin que éstos necesariamente se encuentren repetidos. La recolección y el análisis de los datos lo realizamos en forma paralela, es decir, de forma continua, comparada y en concordancia con la ejecución de cada momento de la investigación. Inicialmente, organizamos las transcripciones de las entrevistas en forma digital, luego los documentos escritos y digitalizados fueron clasificados por momentos y por último, utilizamos los videos para confrontar y profundizar las notas de observación. Luego, de haber organizado el material de análisis, comenzamos el proceso de codificación de los datos, utilizando como unidad de análisis el párrafo. Finalizamos este proceso con una categorización emergente.

Resultados

Este artículo lo fundamentamos en el análisis de algunos episodios de situaciones en el contexto del Transporte Masivo del Metro de Medellín, a partir de tres temas, a saber: (1) *contexto auténtico como desencadenador de una mirada crítica*, (2) *experimentación en modelación: uso libre de estrategias matemáticas*, y (3) *una producción de modelo desde lo retórico hacia lo simbólico*.

Contexto auténtico como desencadenador de una mirada crítica

Las situaciones enmarcadas en el contexto cotidiano del Sistema de Transporte Masivo: Metro de Medellín se constituyeron en el punto de partida para que los estudiantes construyeran modelos matemáticos y reconocieron, en sus experiencias sociales y en el andamiaje cultural, posibilidades de aproximarse a las matemáticas escolares. El contexto referido se convirtió en un escenario social y cultural del cual surgieron ciertas comprensiones del fenómeno de carácter político y crítico. El episodio que presentamos a continuación surge de un diálogo en torno a las consultas realizadas por los estudiantes en la página de internet y un video sobre el Sistema de Transporte Metro, los cuales hacían referencia a los dineros de financiación y deuda de construcción de éste, además de la presentación de las razones por las cuales se convierte en progreso para la ciudad.

01	Invest.	¿Qué opinan con lo que acaban de ver? [refiriéndose al video]
02	Jackobson ¹	¡No!, que hay mucho dinero ahí, [tanto] en la deuda como en los ingresos. Vea en el 2009, 148.600 millones de dólares.
03	Alex	Se ve mucho el desarrollo y todo el beneficio que ha traído. Además de ser un transporte beneficia el entorno.
04	Jackobson	Ahí [refiriéndose al video] nos dieron un dato muy importante que el 90% de las personas que entran al Metro son de estrato uno y dos.
05	Invest.	¿Qué lectura podemos hacer de ese dato?
06	Jackobson	Que nosotros estamos pagando la deuda del Metro
07	Galvis	Beneficia a los estratos uno y dos porque es más favorable.
08	Wilhelm	Inicialmente lo hicieron para las personas pobres porque se supone que son las personas ricas no lo necesitaban.
09	Invest.	Jackobson, ¿qué iba a decir con respecto a eso?
10	Jackobson	A mí no me parece.
11	Wilhelm	Yo creo que algo tiene que estar aportando las personas ricas.
12	Nicole	Sí, porque ahí mostraron que no sólo es un transporte sino que es un lugar turístico para los turistas, que hasta en eso ha avanzado, entonces no sólo se puede decir que sólo para los pobres.
13	Wilhelm	Eso lo hicieron para todos, para todos eh, que las personas de bajos recursos sean los que más lo utilizan, además es público y si es público no importa el dinero ahí lo único que tiene que hacer es pagar el pasaje.
14	Jackobson	Eso de que lo hicieron para las personas de bajos recursos es cierto, pero ¿quiénes son los que pagan la construcción de eso?
15	Andrey	Los mismos beneficiados.
16	Wilhelm	Yo creo que los pagan el Metro son los que montan ahí porque una persona que no tenga los \$1550 del pasaje pues esa persona no está aportando para pagar.
17	Jackobson	Pues yo pensaría que en los servicios cobran también eso.
18	Andrey	Por medio de las bebidas alcohólicas y el cigarrillo también se pagan las deudas.
19	Jackobson	Vea acá también dicen que la Empresa de Tabaco de Antioquia y ¿cuál es la otra?... ¿y quiénes son los que compran tabaco? los ciudadanos mismos.
20	Nicole	Y aquí también dice que los socios de la empresa aportan el 60% de esa deuda, asumen el 60% entonces tampoco somos sólo nosotros.

¹. Todos los nombres propios usados en este documento obedecen a seudónimos.

En el diálogo puede observarse que los estudiantes generan sus opiniones frente a los recursos económicos invertidos en la construcción de Metro y sus actuales fuentes de financiación. Particularmente en el cuarto segmento (04) del diálogo anterior, Jakobson presenta un dato extraído del video, el cual generó en los otros estudiantes, diferentes opiniones e interpretaciones. Con respecto a la actual manera de financiación de la deuda del Metro, Jakobson *cree que son los ciudadanos de estratos bajos quienes se encargan de dicha financiación y que, a pesar de existir otras fuentes, éstas también son derivadas de los aportes de los mismos ciudadanos* (segmento 19). Las afirmaciones de Jakobson indican cómo él se ve y cuál es su rol en la situación de la deuda del Metro, su mirada frente a la situación le permite reconocerse como sujeto partícipe que pertenece a un colectivo ciudadano con una función específica en el pago de la deuda de construcción del Metro. Los demás estudiantes pudieron reconocer la participación de otros estamentos en el pago de dicha deuda; por ejemplo, Galvis resaltó el beneficio y la economía, Nicole reconoce a los socios de la empresa como otros responsables, Wilhelm lo reflexiona distinguiendo a pobres y ricos pero luego resuelve esta distinción con el hecho justo de pagar el pasaje y Andrey desde la información de otros aportes como el del tabaco y el licor. Estas posturas desencadenaron algunas reflexiones entre los compañeros y les permitieron una comprensión de la situación de un modo amplio y problemático. Además, configuraron un espacio para que los estudiantes interactuaran con diferentes opiniones y argumentos, dejando abierta la discusión. Observamos en los estudiantes que, el hecho de plantear hipótesis, motiva la discusión y genera la necesidad de darle respuesta usando sus ideas iniciales que van evolucionando hacia modos cada vez más elaborados y analíticos producto de la reflexión. También evidenciamos cuando los estudiantes exponen diferentes puntos de vista, cómo se transforma cada realidad subjetiva en la medida que se profundiza en los aspectos propios del contexto.

Vale la pena resaltar que a pesar que el funcionamiento del Sistema de Transporte Metro hace parte de la rutina diaria de los estudiantes, ninguno de ellos había reconocido en él un punto de partida para su matematización en el aula de clase. De igual manera, los aspectos críticos anteriormente presentados parecían no haber estado presente en la comprensión que tenían los estudiantes de este sistema de transporte. En ese sentido, es necesario reconocer que el carácter auténtico de la situación les permitió conocer el contexto más a fondo y con mayor complejidad. En coherencia con esta idea, la modelación matemática permitió que los modos de relación de los sujetos con su "realidad" no permaneciera estática y que en el ambiente escolar se permitieran la reflexión sobre algunos aspectos problemáticos de una parte de su realidad.

De acuerdo con Blum et al. (2007) y Blum y Borromeo-Ferri (Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study, 2007) (2009) en el desarrollo del proceso de modelación matemática puede darse algunas fases o momentos los cuales conforman lo que estos investigadores denominan "ciclo de la modelación"; entre estas fases o momentos se tiene: 1) *Comprensión de la situación* 2) *Simplificación y estructuración* 3) *Matematización* 4) *Trabajo matemático* 5) *Interpretación* 6) *Validación* 7) *Exposición*. Estos momentos no lineales se superponen en un proceso continuo, en el cual cada vez se va refinando el conocimiento del fenómeno estudiado, además orientan el camino para la configuración del modelo basado en relaciones, como también su sentido en correspondencia con la necesidad del contexto. De acuerdo con el diálogo presentado anteriormente, observamos un primer acercamiento al momento de comprensión de la situación, ya que, los estudiantes profundizaron en sus descripciones sobre el fenómeno y otros factores que intervinieron en la construcción del Metro. Más allá de la información presentada en el video, en sus comprensiones intervinieron las interacciones con los demás compañeros y los investigadores, su conocimiento del entorno, sus experiencias cotidianas y su capacidad de discusión sobre lo que conocen.

Reconocer que en las situaciones en contextos cercanos a la cotidianidad de los estudiantes es posible identificar fenómenos susceptibles de ser modelados matemáticamente, conlleva a pensar que las matemáticas escolares y la "realidad" no son dominios disyuntos. Si bien, tales situaciones adquieren una función desafiante para el estudiante y un significado sobre expresiones matemáticas; su carácter auténtico, hacen que se encuentren a merced de múltiples interpretaciones respecto a las experiencias e interacciones entre los participantes.

Como pudimos observar en el anterior episodio, el interés inicial de los estudiantes no está en las nociones matemáticas sino en comprender un poco más los fenómenos asociados al mismo; en consecuencia, el papel del contexto no es neutro en el proceso de modelación matemática ni parece estar subordinado al estudio de contenidos matemáticos.

Experimentación en modelación: uso libre de estrategias matemáticas

Partiendo de las reflexiones producidas por los estudiantes en los momentos iniciales del desarrollo del trabajo surgieron algunos cuestionamientos, los cuales enmarcamos en las maneras en que algunos de ellos se transportan hacia el colegio o los familiares a sus trabajos. En este entorno planteamos la siguiente pregunta: ¿Por qué el Sistema de Transporte Metro es conveniente o no para *ti como individuo que forma parte activa de la ciudad de Medellín?* Con este cuestionamiento, los participantes comenzaron diversas tareas para responder esta pregunta, como por ejemplo: definir cómo hacerlo, proponer estrategias para abordar la solución a la pregunta, establecer parámetros y condiciones y decidir cómo recolectar, organizar e interpretar los datos; fue así como surgió entre los estudiantes la necesidad de comparar la situación del Metro con otros referentes. En común acuerdo entre ellos, decidieron comparar con el transporte en bus y en taxi, de esa manera crearon la necesidad de evaluar los beneficios de estos transportes y de establecer criterios de comparación, entre los cuales propusieron: la distancia, el tiempo, la capacidad y los costos. La siguiente verbalización de Alex se convierte en evidencia de este hecho:

Nos basamos en un medio de transporte que es muy llamativo en Medellín: el Metro. El objetivo de nuestro plan de estudio, no sólo mirar el Metro, [sino también] enfocarnos en otros transportes. ¿Cuáles eran las falencias y cuáles eran los beneficios? Mirar cuál era el más favorable en qué nos favorecía, en qué no. Podemos ver desde el principio, intuimos que el Metro como era el más favorable, nos traía muchos beneficios, aparte de que nos transporta, como que también crea un buen aspecto en la sociedad como de parque, un buen aspecto en la estación pues... Pudimos evaluar entre los beneficios pudimos evaluar la distancia, el tiempo, la capacidad y el principal de todos los costos.

Al igual que Alex, los demás participantes centraron su atención en el factor de los costos para evaluar la conveniencia del transporte Metro; asumieron la pregunta ¿Cuál de los medios de transporte es el más favorable? como uno de los criterios para determinar las ventajas. También, es claro en este apartado el surgimiento de una visión global de los estudiantes sobre el problema, la cual les facilita apropiarse de las actividades específicas que necesitan realizar. Entender un problema y saber explicarlo hace parte de habilidades potenciadas en los participantes a raíz de la exploración del contexto.

En el marco de una perspectiva educativa de la modelación matemática para el aula, cuando las situaciones se encuentren en un contexto significativo para el estudiante o es producto de una conformación individual o grupal, de algún modo, los estudiantes se involucran en las discusiones y en las alternativas de solución a las situaciones que planteamos, puesto que estas llaman la atención en el estudiante a nivel social, político, geográfico de manera integral con las matemáticas. Algunas de las estrategias utilizadas por los estudiantes para la solución a la pregunta, las presentamos en los siguientes apartes:

“Investigar, cuanto gasto hay en un bus, carro particular o metro que se dirija al mismo lugar, teniendo en cuenta quien tiene más capacidad de pasajeros, si se necesita menos dinero, tiempo disponible de cada persona. Tiempo adecuado para utilizar el transporte”. (Estrategias para evaluar los datos propuesta por Nicole - transcripción)

Comparar pasajes de bus y metro, bajo tres puntos fijos y promediar para 5 usuarios. (Estrategia para el análisis de la situación de Jakobson - transcripción)

Después de presentar sus propuestas, los estudiantes consideraron importante, en la elección de un medio de transporte, los siguientes aspectos: *el precio, el tiempo, la distancia y la capacidad* (cantidad de personas que se pueden transportar en un momento determinado). Esta *toma de decisiones* estuvo acorde con las experiencias de los estudiantes y se convirtió en una manera de observar una *simplificación* de las variables que pueden existir en el problema y sobre las cuales fundamentaron posteriormente la producción de modelos matemáticos, las decisiones y sugerencias para las *formas de actuación* en el contexto propio del transporte. Este proceso de *simplificación* emergió de los requerimientos del contexto y les demandó a los participantes el establecimiento de otras condiciones para los tres transportes de bus, Metro y taxi de tal manera que pudieran hacer comparaciones entre ellos. El siguiente diálogo es una muestra de ello:

Sandro:	<i>Debemos de tener en cuenta que tomamos de punto de referencia la estación Acevedo [Estación de Metro más cercana al Colegio de los estudiantes] y que damos tres casos que son estación Acevedo-Universidad.</i>
Alex:	<i>Necesitamos un punto de referencia y para tener igual condiciones.</i>
Sandro:	<i>Y también porque cuando íbamos a investigar los tiempos [...]</i>
Nicole:	<i>Por esa misma razón fue que decidimos que los pasajeros debían estar sentados.</i>
Wilhelm:	<i>Cuando se hace una investigación no se puede tener en cuenta un sólo tipo de datos.</i>
Nicole:	<i>También de que una [estación] fuera muy cerca.</i>

Es en este proceso de *simplificación*, es decir, eliminación, aceptación, proposición y análisis de las variables que intervienen en la posible solución en donde los estudiantes comienzan a aislar algunos factores relacionados con las circunstancias cotidianas; de algún modo, los análisis se esgrimen en un plano más analítico, es decir, en relación con factores correspondientes a cantidades cuantificables dentro del campo matemático. Al respecto, Bassanezi (2002) puntualiza que la simplificación consiste en reconocer que los fenómenos que se presentan para el estudio matemático son, en general, excesivamente complejos si los consideramos en todos sus detalles y que se requiere, por tanto, restringir y aislar el campo de estudio apropiadamente y de tal modo que el problema sea tratable y al mismo tiempo mantenga su relevancia.

Es evidente que los datos tienen que ver con las experiencias de uso de los transportes y los conocimientos adquiridos desde sus vivencias en el contexto. Estos aspectos son modificables mediante las interacciones grupales y el compartir de estas experiencias. La recolección de los datos les implicó a los estudiantes un proceso de reflexión sobre cuáles aspectos necesitan información y cómo estos les permiten medir y valorar una parte del fenómeno en cuestión. En el siguiente recuadro presentamos algunos datos tomados por Lindsay que son evidencia de sus análisis y propuesta:

Metro Acevedo - Estadio + 25 min Pasajeros - 46 Sentados	Acevedo - Universidad - $t = 9$ min Pasajeros - 56 Sentados
Bus - 22 Pasajeros	Acevedo - Itaguá - $t = 30$ min Promedio personas de pie = 250

Ilustración 1. Toma de datos por Lindsay

Los estudiantes tomaron los datos que, a su juicio, les permitirían dar cuenta del número de personas que puede transportar el bus en relación con el Sistema Metro, y de las distancias que recorren para ir de un lugar a otro. En esta actividad, se vieron enfrentados a diferentes desafíos en términos de la complejidad que de la situación, en los instrumentos y en las maneras en que se debería tomar estos datos. Esto hizo que los estudiantes tomaran decisiones que les permitió simplificar su proceso, y centrarse más en tomar los datos en el Metro

sólo de las personas que estarían sentadas al igual que en el bus. En la organización de los datos, los estudiantes construyeron la siguiente tabla discriminada según la ruta, el tipo de transporte y los cuatro factores o condiciones.

A → E	M	B	T
Capacidad	46 P	22 P	4 P
Distancia	7,35 Km	7,57 Km	4,23 Km
Tiempo	25 min	35 min + 15 min 48 min	30 min
Precio	\$ 1.150 \$ 1550	\$ 1400	\$ 12000

A → I	M	B	T
Capacidad	46 P	22 P	4 P
Distancia	13,99 Km	25 Km	20,9
Tiempo	30 min	46 min + 23 min 69 min	40 min
Precio	\$ 1550	\$ 2800	\$ 23,000

A → O	M	B	T
Capacidad	46 P	22 P	4 P
Distancia	3,43 Km	3,44 Km	3,44 Km
Tiempo	9 min	16 min	12 min
Precio	\$ 1550	\$ 1400	\$ 4000

Ilustración 2. Organización de los datos (M: Metro, B: Bus, T: Taxi)

Esta producción realizada en forma grupal constituye una estrategia original de los participantes para la observación de los datos de forma comparada y diferenciada. Este tratamiento inicial de los datos permite considerar las cantidades constantes pero asociadas a diferentes magnitudes. Por ejemplo, la capacidad podría entenderse como una propiedad de los cuerpos, desde el punto de vista métrico; pero, en el análisis de los estudiantes, la capacidad se interpretó como la cantidad de personas que pueden permanecer sentadas en los diferentes transportes, definición dada desde los significados proporcionados por el contexto en particular. Para esta situación los estudiantes le atribuyeron el significado de "número de personas a transportar". El hecho de que los datos fueran recolectados por los mismos estudiantes, marca una pauta diferente sobre los procesos tradicionales de solución de problemas (e.g. enunciados verbales presentados en libros de texto), en los cuales los datos ya se encuentran dados, lo cual, de cierta forma limita los procesos de experimentación. Es así como en este proceso de experimentación, la recolección de los datos y su interpretación se dan a la luz del contexto. Al respecto, Bassanezi y Biembengut (1997) expresan:

La recogida de los datos también puede realizarse por medio de una experimentación directa o de investigaciones estadísticas. Conviene destacar que muchas veces los datos obtenidos son de naturaleza esencialmente etnomatemática, proveniente de costumbres de una comunidad que los utiliza sin preocuparse del carácter científico de su origen. (p.16)

Las estrategias utilizadas por los estudiantes fueron diversas y estuvieron acordes con las posibilidades que le ofrecía el medio; por ejemplo: en el caso del taxi decidieron preguntar a algunos conductores y usuarios de este servicio, pero en los casos del bus y del Metro varios estudiantes realizaron los viajes e hicieron conteos en horas específicas del servicio. En el análisis de los datos, los estudiantes intentaron establecer relaciones entre las cantidades allí delimitadas, para ello colocaron en juego estrategias como la de elegir factores, elegir rutas y obtener la información real, entre otros. El siguiente recuadro, presenta algunas de las conclusiones producidas por Alex con respecto a la economía del tiempo y del dinero:

Conclusiones

1-Recorrido A \rightarrow E

- Para cualquier estudiante sea cual sea la ruta, el metro será más favorable respecto al precio del pasaje y al tiempo
- En la Ruta A \rightarrow E es más favorable el metro por las condiciones tiempo y distancia.

Transcripción literal del escrito producido por Alex

Observamos una manera en que los estudiantes, en conversatorios grupales, establecen una relación cualitativa entre la cantidad de dinero gastado y la distancia recorrida. En esta relación entre dos cantidades de magnitud, los estudiantes establecen una correspondencia inversa, si aumenta la distancia disminuye el precio con respecto al transporte Metro, para el bus asocian el aumento de la distancia en relación al aumento del pasaje. Así, frente a este momento de modelación, el establecimiento de relaciones desde el lenguaje verbal, les permite a los estudiantes construir un modo natural de solucionar y proponer respuestas a la situación.

Producción de modelos matemáticos: de relaciones retóricas a relaciones simbólicas

La construcción de hipótesis y argumentos para dar solución a la pregunta planteada inicialmente con respecto a la conveniencia del transporte Metro, les permitió a los participantes la posibilidad de continuar con el proceso de modelación, para proponer un modelo matemático que describiera el ahorro desde una publicidad que presenta el Metro a los usuarios en la divulgación del tiquete estudiantil (modalidad propuesta por el Sistema Metro, donde los estudiantes pagan un valor menor por el tiquete que representa el pasaje), como estrategia para el ahorro de los estudiantes del Municipio de Medellín. Veamos:

"Durante el 2009, el Programa del Tiquete Estudiantil significó un ahorro mensual de 25 mil 164 pesos a cada estudiante que se movilizó en bus o buseta, ya que el tiquete cubrió el 50% del valor de la tarifa. En total durante el año, el Tiquete le ahorró 3 mil 919 millones de pesos a los usuarios de este tipo de transporte.

Estas personas se suman a las 9 mil 813 que se beneficiaron con el transporte del Metro. El ahorro para éstas fue de 35 mil 400 pesos mensuales, considerando una tarifa preferencial de \$710 frente a \$1.300 de un usuario con perfil frecuente".

Beneficiarios	BUS	METRO
# días escolares año	186	186
Valor pasaje (2)	2,800	2,800
Valor pasajes año	520,800	520,800
Valor pasaje con tiquete Trans. Estu. (2)	\$ 1.400	\$ 1.470
Valor pasajes año con tiquete	260,400	273,420
Ahorro	260,400	247,380
Ahorro %	50%	47,5%

$\frac{247380}{520,800}$

¿Qué estrategia utilizarías para calcular el ahorro?, Describe una forma que permita calcular los valores de la tabla.

ESTRATEGIAS

Sumamos los valores de los precios para calcular el pasaje / 2 este resultado lo multiplicamos por 186 que es el número de días estudiados para calcular el valor pasaje año. Luego multiplicamos valor pasaje con tiquete (2) con 186 días escolares año para calcular valor pasaje año con tiquete. Luego restamos valor pasaje año, con valor pasaje año con tiquete para calcular el ahorro, luego se hizo una regla de 3 para calcular el ahorro en porcentaje (%).

Ilustración 3. Producción escrita de Lindsay

A pesar de disponer de una experiencia previa con símbolos algebraicos, los estudiantes expresaron las relaciones que iban determinando a través de expresiones verbales. Inicialmente presentaron descripciones como "a medida que una crece la otra también", pero posteriormente, las fueron refinando de tal manera que dejaban en evidencia relaciones de tipo funcional entre las cantidades (Ver ilustración 3 y 4). Es evidente que los participantes emplearon en su tratamiento matemático varios argumentos y procedimientos, como estructuras aditivas, multiplicativas, regla de tres, porcentajes. Es decir, hacen uso de sus conocimientos con un sentido en el contexto. Doorman y Gravemeijer (2009) afirman que para el planteamiento de un modelo matemático se debe tener en cuenta en primer lugar que los estudiantes implicados en el modelado de los problemas del contexto, propongan estrategias de la situación específica, posibles de modelar de una manera informal. El siguiente modelo fue desarrollado por cinco participantes de forma conjunta, dando relevancia a la identificación de variables y la estrecha relación entre ellas.

$G_T = \# \text{días} \times V_T$ $G_S = \# \text{días} \times V_P$ $A = G_S - G_T$	$G_T = \text{Gastos tiquete estudiantil}$ $G_S = \text{Gastos señallo}$ $A = \text{Ahorro}$ $V_T = \text{Valor Tiquete Estudiantil}$ $V_P = \text{Valor Pasaje}$
---	--

Ilustración 4. Producción escrita por el equipo de Lindsay

Como podemos ver en el modelo (planteado por Sandro, Lindsay, Alex, Andrey y Jhony), los estudiantes aplican elementos básicos multiplicativos y los relacionan por medio de una diferencia, especificando que el ahorro está dado por la diferencia entre los gastos mirados desde las dos tarifas. Durante la discusión sobre el modelo, los participantes analizaron que un viaje equivale a dos tiquetes (ida y vuelta), por tanto, re-organizaron el modelo de la siguiente forma:

$G_T = (\# \text{días} \times 2) V_T$ $G_S = (\# \text{días} \times 2) V_P$ $A = G_S - G_T$	$G_T = \text{Gasto tiquete}$ $G_S = \text{Gasto señallo}$ $A = \text{Ahorro}$ $V_T = \text{Valor tiquete estudiantil}$ $V_P = \text{Valor señallo}$ $\# \text{días} = 2 \text{ viajes}$
---	---

Ilustración 5. Modelo reevaluado

Durante el proceso de construcción del modelo, los estudiantes reflexionaron sobre los elementos que interfieren en la propuesta realizada, teniendo la posibilidad de reajustar las relaciones a las circunstancias reales, en este caso, la idea de que un viaje se debe considerar como dos, ya que la persona que lo toma de ida, debe devolverse en condiciones ideales, bajo la misma modalidad de transporte. El ocuparse de tales problemas requiere de los individuos construir, probar y aplicar los modelos matemáticos diseñados para atender a cuestiones de importancia en ajustes del mundo real (Blum et al. 2007).

El modelo presentado en la Ilustración 6 fue planteado por Jakobson, quien propuso un modelo lineal para el ahorro, empleando letras para nombrar las variables involucradas en el problema tratado. Además de socializar el modelo que nos permite conocer el ahorro, desarrolló un modelo derivado, el cual permitió representar la cantidad de dinero ahorrado como un porcentaje.

$A = (V_P - V_E) t$ $A = \text{Ahorro}$ $V_P = \text{Valor pasaje}$ $V_E = \text{" " " estudiantil}$ $t = \# \text{ viajes}$	$A\% = \frac{A \cdot 100}{V_P \cdot t}$
--	---

Ilustración 6. Modelos propuestos por Jakobson

En esta representación, podemos evidenciar un análisis general en términos algebraicos de la situación, precisando que el número de viajes, presenta la misma condición del modelo anterior (equivale a dos tiquetes). Jakobson diferencia cantidades constantes y variables dentro de la relación funcional producida. Luego, de

que en el grupo surgieran dos formas para calcular el ahorro, los participantes decidieron dar un valor de cinco viajes, es decir, diez (ida y regreso) y así, calcular de nuevo el ahorro. Veamos:

$A = 5(2) \times 735$ $= 10 \times 735$ $A = 7350$	$65 = 5(2) \times 1400$ $65 = 14000$ $A = 14000 - 7350$ $A = 6650$	$A = (1400 - 735) 10$ $A = 6650$ $A = 6650$
--	--	---

Ilustración 7. Verificación desde los modelos

<p>Bus</p> $A = (V_p - V_e) t$ $= (2800 - 1400) 186$ $= 1400 \times 186$ $A = 260.400$ $A\% = \frac{(V_p - V_e) 100}{V_p}$ $= \frac{(1400) 100}{2800}$ $A\% = 50\%$	<p>Metro</p> $A = (V_p - V_e) t$ $= (2800 - 1470) 186$ $= 1330 \times 186$ $A = 247.380$ $A\% = \frac{(V_p - V_e) 100}{V_p}$ $= \frac{(1330) 100}{2800}$ $A\% = 47,5\%$
---	---

Ilustración 8. Cálculo de los datos sobre el ahorro (Andrey)

Podemos constatar en los anteriores procesos, que al utilizar los dos modelos se obtendrán los mismos porcentajes. Resaltamos el papel del contexto y la apropiación que tienen los estudiantes de él, para facilitar la comprensión del modelo matemático planteado desde ambas estructuras. De esta forma, calcular el ahorro, utilizando la tarifa de un solo viajero comparada con respecto al tiquete estudiantil, se convirtió en una de las actividades de modelación que les implicó a los estudiantes la determinación de variables y otras cantidades como gastos, ahorro y valor del pasaje (según el transporte empleado), y su relación en términos de modelo. Sin embargo, no sólo la representación algebraica les bastó para abordar el problema, Jakobson enfrenta el problema de la siguiente manera:

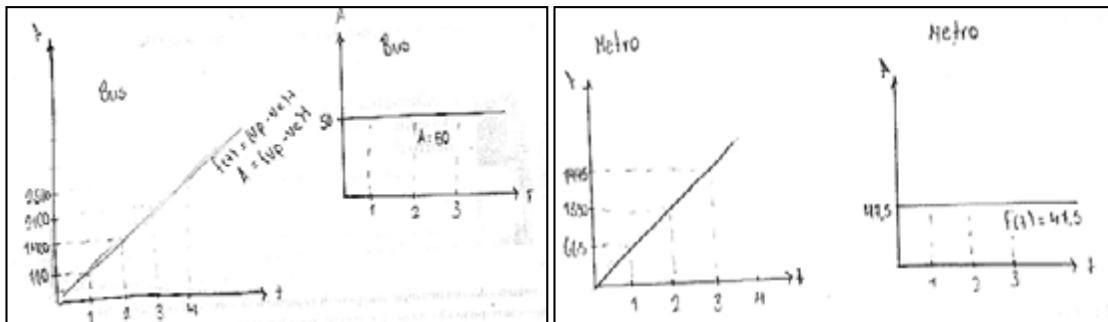


Ilustración 9. Gráfica de ahorro con relación al número de viajes

Empezamos a graficar lo que se ahorra el bus con tiquete estudiantil. Este es el ahorro en pesos y el ahorro respecto al número de viajes. La función que nos representa esto es: $f(t)$ es igual al valor del pasaje normal menos el valor del pasaje con tiquete estudiantil por el número de viajes y nos da una función lineal que

es igual... , el ahorro es igual a 700 pesos por el número de viajes. El porcentaje podemos ver cómo sale, la fórmula es: valor del pasaje menos valor del pasaje estudiantil por 100 dividido el valor del pasaje normal, nos da una constante que es el 50% de ahorro para el estudiante. Ahora comparamos con el Metro el ahorro que tiene con tiquete estudiantil, la función es la misma sino que cambia el valor del pasaje normal que es \$1550 y el ahorro sería menor, que es de 765. El ahorro sería de 47,5 %. (Jacobson)

Con esta actividad, los estudiantes pudieron establecer conexiones entre las expresiones que produjeron y sus significados del contexto particular, involucrando diversos escenarios que favorecen la construcción de nociones, el desarrollo de capacidades para el análisis y la toma de decisiones, que en definitiva hace parte de lo que debe propiciar nuestros procesos educativos. Swafford y Langrall (2000) destacan la importancia de las relaciones entre las representaciones que los estudiantes proponen en el contexto del problema y las conexiones que establecen entre unas representaciones y otras. En estos términos, las diferentes cantidades y representaciones hacen en conjunto esquemas que movilizan los argumentos desde diversos análisis, dando valor especial y particular a las relaciones existentes en la presentación de sus propuestas y el contexto.

La búsqueda del modelo se convierte en un elemento valioso en tanto se observa como un proceso dinámico entre el contexto y las matemáticas y no como una resultante inmediata. De acuerdo con Blum (1993) su punto de partida es una situación en el "mundo real" y ésta tiene que ser simplificada y estructurada para la búsqueda a un modelo válido. En este proceso, se hace necesario varios momentos concretos para construir, bajo un contexto propio de los estudiantes, una relación matemática. Estos momentos pueden verse como saltos cualitativos, experimentados mediante la discusión y a manera de retos desde el mismo contexto y no mediante procedimientos predeterminados a seguir.

De acuerdo a lo anterior, el proceso de modelación es abierto y no rígido, lo cual evidenciamos en las tareas y modos de actuar no predefinidos, éstas las desarrollamos en cadena según las propuestas de los participantes, de las necesidades y de sus acciones. Podríamos pensar en este proceso de modelación matemática como una espiral ascendente, por lo que, la comprensión de la situación en un contexto se refina en tanto se simplifican variables y se producen modelos, lo cual permite volver a leer el contexto de manera diferente.

La búsqueda de modelos mediante el tratamiento matemático sugiere que detrás de un modelo matemático hay un conjunto de ideas y análisis que lo hacen una producción particular a los sujetos, significado por el reconocimiento de lo variacional en el contexto en cuestión. En este sentido, un modelo representado simbólicamente les implicará a los estudiantes establecer relaciones que han sido pensadas inicialmente en forma descriptiva y discursiva.

Conclusiones

Los casos reportados en este artículo se convierten en evidencia de que al establecer relaciones a partir de situaciones mediante representaciones matemáticas, los estudiantes se ven implicados en la generación de una mirada reflexiva frente a las correspondencias entre el modelo y el contexto tratado.

El proceso de modelación que se desarrolló en esta investigación evidenció cierto grado de libertad con respecto a las matemáticas que los estudiantes requieren para describir y tratar el fenómeno en cuestión. En este sentido, los procedimientos matemáticos para la creación de modelos son usados dependiendo de la situación y no la situación es usada dependiendo de los conceptos matemáticos. Es decir, los conceptos matemáticos que puedan ayudar a producir el modelo matemático no podrán ser forzados a su uso en forma a priori, éstos van emergiendo y son requeridos durante el proceso. Así, es posible que estos procedimientos implementados para la construcción de conocimientos escolares puedan aportar a la articulación en red de diferentes nociones numéricas, estadísticas, variacionales, algebraicas, las cuales comúnmente suelen ser separadas y segmentadas.

En el estudio reportado en este documento puede observarse que la producción de un modelo tiene su génesis en representaciones retóricas, lo cual puede justificarse porque es la descripción del contexto su fuente de producción; sin embargo, la necesidad de confiar en los argumentos que solucionan el problema conllevan a establecer relaciones matemáticas descritas a través de representaciones de naturaleza simbólica, gráfica y tabular. La idea de modelo matemático entonces integra, no sólo la simbolización de una relación entre dos variables, sino también las diferentes representaciones y descripciones de tipo retórico, que en conjunto aportan a una forma de describir una situación particular.

Las situaciones enmarcadas en contextos que le son familiares a los estudiantes desencadenan múltiples ideas, propuestas y análisis sobre esa "porción de realidad" que se busca modelar mediante relaciones matemáticas; tales situaciones e ideas otorgan un papel al estudiante de empoderamiento sobre ellas, pues su conocimiento de uso y funcionamiento se transforman en una necesidad digna de pensarse desde construcciones matemáticas. En este sentido, este tipo de situaciones generan una conexión con las experiencias, la vida cotidiana y los conocimientos empíricos o interiorizados por los estudiantes sobre el fenómeno estudiado, de este modo les permite comprenderlas, transformarlas y ampliarlas. En nuestro caso, el contexto del Sistema de Transporte Masivo Metro de Medellín puede considerarse como un instrumento que, al interior de las matemáticas escolares, posibilitó el estudio de nociones inmersas en el álgebra escolar.

Los resultados de este estudio sugieren que cuando reconocemos los contextos propios de la cotidianidad de los estudiantes como insumos para desarrollar actividad matemática escolar, no solo hay mayor participación y compromiso en aspectos como la toma de datos, la producción de modelos y de significados, sino que también presentamos una mayor comprensión de los fenómenos asociados a dicho contexto; por tanto, el papel del contexto no es neutro en el proceso de modelación matemática sino que por el contrario puede articularse a las matemáticas escolares a través de un proceso de modelación matemática.

Agradecimiento

Aunque nos sean responsables de las ideas expuestas en este documento, queremos agradecer a los miembros de la Red Colombiana de Modelación Matemática, en particular agradecemos los comentarios que Mónica Marcela Parra Zapara y Paula Rendón-Mesa hicieron a las primeras versiones de este documento. De igual manera, agradecemos a los estudiantes cuyos seudónimos son: Jakobson, Lindsay, Wilhem, Nicole, Alex, Galvis, Andrey, Jhony y Sandro por su participación y producciones durante la investigación.

Referencias

- Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime*, 11(1), 49-92.
- Araújo, J. L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. En J. Barbosa, A. Caldeira, & J. Araújo (Eds.), *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (pp. 17-32). Recife: SBEM.
- Araújo, J. L. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 55-68.
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto
- Bassanezi, R., & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS. Revista de diáctica de las matemáticas* (32), 13-25.

-
- Ben-Chaim, D.; Ilany, B. S. & Keret, Y. (2008). "Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. *Boletim de Educação Matemática-Bolema*, 21 (31), 125-159
- Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 - 390.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction In T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester, UK: Horwood.
- Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation* (Vol. 39). New York: Springer
- Colombia, M. E. N. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Doorman, L., & Gravemeijer, K. P. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, 41(1-2), 199-211.
- Hays, P. (2004). Case study research. En: K. DeMarrais & S. Lapan. *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social sciences* (pp. 217-234). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hoyle, C., Skovsmose, O., Kilpatrick, J., en colaboración con Valero, P. (2005). Meaning in Mathematics Education. En C. Hoyle, O. Skovsmose, J. Kilpatrick, & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (Vol. 37, pp. 1-16). New York: Springer.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *J Math Didakt*, 31(1), 51-76.
- Ramos, A. & Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica*, 20(4), 535-556.
- Swafford, J., & Langrall, C. (2000). Uso preinstruccional de ecuaciones para describir y representar situaciones problemas en un grupo de sexto grado. *EMA*, 5(3), 203-235.
- Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Cuadrante*, 11(1), 49-59.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En: P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 23, (pp. 1087-1096). México D.F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2009). El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente. En: P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 22, (pp. 1443-1451). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.