



Cómo citar el artículo

Santa Ramírez, Z.M., Jaramillo López, C.M. & De Carvalho Borba, M. (2015). Doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 46, 154-168. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/706/1233>

El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico*

Paper folding as a Mean to Produce Knowledge on Geometry

L'art du pliage comme un moyen pour produire de la connaissance dans le champ de la géométrie

Zaida Margot Santa Ramírez

Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia

Magíster en Educación de la Universidad de Antioquia

Candidata a Doctora en Educación de la Universidad de Antioquia

Docente de cátedra de la Universidad de Antioquia y de la Universidad Eafit

zaida.santa@udea.edu.co

Carlos Mario Jaramillo López

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Medellín

Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad

Politécnica de Valencia

Profesor Titular del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia

Líder del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (U de A. - Eafit)

carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Marcelo de Carvalho Borba

Licenciado en Matemática de la UFRJ, Brasil

Magíster en Educación Matemática de la UNESP, Brasil

Doctor en Educación Matemática de la Universidad de Cornell, Estados Unidos Profesor del Programa de Posgrado en Educación Matemática de la UNESP, Brasil

Líder del Grupo de Investigación GPIMEN

mborba@rc.unesp.br

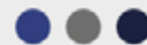
Recibido: 15 de enero de 2015

Evaluado: 5 de agosto de 2015

Aprobado: 10 de septiembre de 2015

Tipo de artículo: artículo corto

* Este artículo se deriva del trabajo de investigación doctoral "Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel", que actualmente se adelanta en el marco del proyecto COLCIENCIAS-CAPES, código 111562838729, desarrollado entre la Universidad de Antioquia (Colombia) y la Universidad Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Brasil).



Resumen

Debido al carácter formal que se le ha dado a la enseñanza de la geometría en los cursos que componen los programas educativos, durante el proceso de investigación del que trata este artículo se han percibido ciertas dificultades de los maestros en la producción de conocimiento geométrico, entre ellas, carencias en la comprensión de conceptos básicos de la geometría. Estas se evidencian cuando los maestros abordan su enseñanza en los niveles básicos de la educación. En este escenario, el estudio pretende analizar las maneras en que se generan procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros-con-doblado-de-papel, de tal forma que se hagan aportes a su desarrollo profesional docente. Por lo tanto, mediante una investigación de diseño cualitativo, basada en una tarea de formación con doblado de papel, se pretende mostrar cómo este colectivo de maestros, a través de sus interacciones, puede producir conocimiento geométrico para enriquecer su proceso de formación.

Palabras clave

Colectivo de maestros-con-doblado-de-papel, Producción de conocimiento, Seres-humanos-con-medios, Trisección de un ángulo agudo.

Abstract

Because of the formal nature which has been conferred to the teaching of geometry in the courses constituting the educational programs, during the research reported in this article has been noticed some difficulties of teachers for producing knowledge on geometry such as poor understanding of the basic concepts, among others. This scarcities become evident when the teachers must teach them in the basic levels of education. In this scenario, the study is aimed at analyzing the ways in which are created processes of production of knowledge on geometry in a group of teachers using paper folding, in such a way that this contribute to their professional development as

teachers. Therefore, by means of a qualitative research, which is based on an educational activity involving paper folding, it is expected to show how this group of teachers, through their interactions, can produce knowledge on geometry in order to enhance their educational process.

Keywords

Group of teachers practicing paper folding, Production of knowledge, Human beings with means, Trisection of an acute angle.

Résumé

A cause de le caractère formel qui a été donne à l'enseignement de la géométrie dans les cours qui conforment les programmes éducatifs, pendant le processus de recherche dont est dérivé cet article on a perçu quelques difficultés chez les professeurs par rapport à produire de la connaissance dans le champ de la géométrie, entre autres, carences pour bien comprendre les concepts de base de la géométrie. Ces carences deviennent évidentes quand les professeurs abordent leur enseignement dans les niveaux de base de l'éducation. Dans ce contexte, cette étude a comme objectif d'analyser les formes de production de la connaissance chez un groupe de professeurs en utilisant l'art du pliage, de telle manière qu'on peut contribuer à leur développement professionnel. Par conséquent, en utilisant un recherche de type qualitative, qui se base sur des activités de pliage de papier, on prétend de montrer comment ce groupe de professeurs, à travers de leur interactions, peuvent produire de la connaissance dans le champ de la géométrie pour améliorer leur processus éducatif.

Mots-clés

Groupe de professeur en pratiquant l'art de pliage, Produire de la connaissance, Êtres humains avec moyens, Trisección d'un angle aigu.

Introducción

La geometría es un componente importante del currículo de matemáticas en Colombia, por permitir procesos de visualización, de argumentación y de formalización, en un correspondiente proceso de lo concreto a lo abstracto. Por lo tanto, debería ser aprovechada específicamente en las aulas de clase para generar procesos de razonamiento en los estudiantes. Sin embargo, en la actualidad, la geometría se ha usado como "terreno natural para la introducción de la deducción" (MEN, 2004, p. 8). Es decir, lo que se ha percibido en algunas aulas de clase colombianas, tanto de bachillerato como universitarias, es el uso de una geometría formal, que se fundamenta en la demostración y validación de conjeturas y en el uso de fórmulas, sin alcanzar una comprensión de las mismas. Al respecto, International Commission on Mathematical Instruction (ICMI, 1998) precisa, en las perspectivas de la enseñanza de la geometría para el siglo XXI, que en cursos tradicionales de geometría euclidiana, el material que se presenta a los estudiantes suele ser un producto final de la actividad matemática, desarticulado de los planes de estudio, los cuales pretenden que los alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos de manera activa y participativa.

Sin embargo, de acuerdo con Santa y Jaramillo (2013), las dificultades no solamente radican en mostrar la geometría como un sistema formalizado de conocimientos en algunos espacios de clase de colegios o universidades, sino que también se debe considerar que en varias de estas instituciones ni siquiera se aborda la enseñanza de la misma, a causa, quizás, de las dificultades que manifiestan algunos maestros en formación

o maestros en ejercicio sobre esta rama de las matemáticas. Estas problemáticas podrían estar relacionadas con un escaso conocimiento de la disciplina, pues se observa que algunos maestros presentan falencias en la comprensión de conceptos geométricos básicos. Autores como Ponte y Chapman (2006) establecen que muchos estudios que cubren las tres últimas décadas de las conferencias del PME, se han focalizado, de manera directa o indirecta, en las dificultades o deficiencias que exhiben los maestros en lo referente a conceptos matemáticos o a procesos de razonamiento asociados a estos.

De la misma manera, nuestra experiencia docente en el campo universitario, particularmente en la formación de maestros en cursos y/o talleres en programas de maestría, nos ha permitido observar que algunos maestros presentan carencias en cuanto al saber disciplinar de la geometría. Pero la dificultad no radica en el desconocimiento como tal, sino en los errores conceptuales que este puede causar, que pueden ser eventualmente transmitidos de manera directa a los estudiantes, cuando se aborda su enseñanza. Por ejemplo, algunos maestros suelen desconocer los conceptos relacionados con los lugares geométricos; hasta el momento no hay dificultad aparente; sin embargo, al enseñar algunas líneas notables de los triángulos (mediatriz y bisectriz), las muestran como elementos particulares de estos y no hay una trascendencia a su aspecto general como lugares geométricos. Otro caso común, es encontrar maestros que desconocen propiedades y relaciones de inclusión inherentes a los cuadriláteros, enseñando de manera independiente, por ejemplo, los conceptos de paralelogramo, rectángulo y cuadrado, sin considerar las relaciones entre estos. Al respecto, Aballe (2000) menciona que una cantidad importante de futuros maestros o maestros en ejercicio “tienen considerables lagunas en la construcción de los conceptos matemáticos elementales y en las herramientas Matemáticas de aplicación” (p. 89).

Las dificultades mencionadas anteriormente y los estudios de Santa (2011), quien afirma que “los estudiantes logran la comprensión de muchos conceptos geométricos con base en la visualización de construcciones que se pueden hacer de manera fácil y divertida, mediante el doblado de papel” (p. 275), nos inducen a analizar formas de contribuir en la producción de conocimiento geométrico de los maestros, a través del doblado de papel. Es importante anotar que en este estudio, Santa (2011) infirió que la comprensión dependía notablemente de las interacciones del estudiante, con la geometría del doblado de papel y con la investigadora. En esta línea, parecía que la producción de conocimiento, en particular conocimiento geométrico, se daba mediante la interacción de un colectivo de seres humanos con un medio determinado, que era el doblado de papel; pero dicha inferencia no fue objeto de estudio en esa investigación y, en ese entonces, pasó a un segundo plano.

Por lo tanto, se podría pensar en la posibilidad de usar el doblado de papel como un medio que puede aportarle al conocimiento disciplinar geométrico del maestro, al conocimiento de su enseñanza y, en general, a su desarrollo profesional docente, pues le puede permitir, dentro de un colectivo, “hacer construcciones, verificarlas, visualizarlas, lanzar conjeturas, discutir las, analizarlas y finalmente, probarlas” (Santa & Jaramillo, 2013, p. 5), analizar su práctica pedagógica sobre geometría, en compañía de otros maestros, y generar actividades de aula, desde sus experiencias y necesidades. Como consecuencia, la visualización de construcciones hechas mediante el doblado podría posibilitar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros.

Vale la pena resaltar los estudios llevados a cabo por algunos integrantes del grupo de investigación GPIMEM¹, quienes han abordado los procesos de producción de conocimiento en colectivos de estudiantes o maestros, con medios tecnológicos como calculadoras, o *software* como Derive, Geogebra, entre otros. No obstante, en una revisión de literatura existente relacionada con la descripción de los procesos de producción de conocimiento geométrico que pueden emerger de un colectivo particular-con-doblado-de-papel, al parecer, no son claros ni se han develado todavía.

Por otro lado, Borba y Villarreal (2005) precisan que los medios utilizados condicionan la manera en que el conocimiento se produce en un colectivo determinado. Es decir, afirman que “una nueva tecnología resulta en un nuevo colectivo que produce nuevos conocimientos, que son cualitativamente diferentes a los conocimientos producidos por otros colectivos” (p. 24). En este sentido, el doblado de papel podría generar

1 Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil.

procesos de producción de conocimiento geométrico diferentes a los que se generan al trabajar con algún *software* o con otro medio particular.

Por lo tanto, este estudio pretende analizar las maneras en que se generan procesos de producción de conocimiento, a través del medio “geometría del doblado de papel” (y todos los demás procesos que este medio abarca: lenguaje, visualización, experimentación, entre otros) en un colectivo particular de maestros. De esta forma, el propósito de la investigación es responder la pregunta ¿cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros-con-doblado-de-papel, de tal manera que aporten a su desarrollo profesional docente?

En los siguientes apartados, el presente estudio se fundamenta desde el constructo teórico *seres-humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005), en tanto que, como se dijo anteriormente, se ha percibido que las interacciones de un colectivo con medios permite la producción de conocimiento. Adicionalmente, se justifica el uso de una metodología de corte cualitativo, a través de una investigación de diseño, que tiene como base una serie de tareas de formación de maestros, una de las cuales es la trisección de un ángulo agudo, mediante la geometría del doblado de papel.

Constructo teórico seres-humanos-con-medios

Borba y Villarreal (2005) desarrollaron un constructo teórico denominado seres-humanos-con-medios, en el que analizan la manera en que el conocimiento matemático emerge de un proceso de construcción hecho por un grupo de personas, al que se le llama colectivo, cuando usan determinados medios. De acuerdo con Villarreal (2012), el sujeto epistémico del constructo es un colectivo pensante constituido por *seres-humanos-con-medios*. Esta noción trae consigo dos ideas fundamentales:

Por un lado, que la cognición no es una empresa individual, sino social (por eso humanos) y, por otro lado, que la cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce el conocimiento y este componente del sujeto epistémico no es auxiliar o suplementario, sino esencial. (Villarreal, 2012, p. 79)

En este sentido, no existe la posibilidad de pensar en una separación entre los humanos y los medios, dado que, de acuerdo con los autores, los medios constituyen, de manera natural, una parte fundamental del sujeto, al destacar su papel como actores no humanos “en moldear las posibilidades que tienen esos colectivos de construir conocimiento” (Borba, 2002, p. 142). De esta manera, la historia de los medios estará siempre unida a la historia de la humanidad (Lévy, 1993, citado por Borba, 2002). Por lo tanto, el constructo acoge una postura de tipo teórico, en la que “apoya la idea de que el conocimiento es producido por un colectivo compuesto de humanos-con-medios, o humanos-con-tecnologías, y no como otras teorías sugieren, por los humanos individuales o, colectivos compuestos solo por humanos” (Borba & Villarreal, 2005, p. 23).

Debido a que se ha percibido que las interacciones del colectivo de maestros con el doblado de papel permiten visualizar conceptos geométricos, generar procesos de experimentación y justificación, propiciar procesos de comprensión (aspectos que aportan a la producción de conocimiento geométrico), el constructo que fundamenta la investigación es el de Borba y Villarreal (2005). Aunque esta estructura teórica se asocia principalmente a las tecnologías de la información, es importante mencionar que el doblado de papel también constituye un medio que permite la producción de conocimiento dentro de un colectivo.

Adicionalmente, en el desarrollo del trabajo de campo, se consideran unidades de análisis aquellos episodios que acontecen, como resultado de las interacciones entre el colectivo con los investigadores y con el doblado de papel. En este caso, el proceso de doblado de papel trae consigo otros subprocesos, como son los de visualización, de experimentación, uso del lenguaje verbal y no verbal, entre otros. Por consiguiente, el colectivo del estudio está conformado tanto por los maestros en ejercicio, que participan de manera voluntaria, como por los investigadores, tal como se observa en la Figura 1.



Figura 1: Colectivo de maestros-con-doblado-de-papel.

Metodología

Paradigma y tipo de estudio

El foco de interés de esta investigación se centra en el análisis de los procesos de producción de conocimiento que emergen de las interacciones del colectivo de maestros-con-doblado-de-papel, con el fin de descubrir, valorar o consolidar las posibles transformaciones en los maestros, con respecto a su conocimiento geométrico y el de su enseñanza, que les permitan, a su vez, un desarrollo profesional docente que podría enriquecer sus prácticas de aula. De acuerdo con Ponte (2012), los profesores aprenden de su actividad y de la reflexión continua en torno a esta, cuando participan en prácticas sociales como los colectivos de profesores. El desarrollo profesional involucra “el desarrollo progresivo de potencialidades y la construcción de nuevos saberes; está marcado por las dinámicas sociales y colectivas, y depende de las formas de articular intereses, necesidades y recursos del profesorado” (Ponte, 2012, p. 9). Por lo tanto, la producción de conocimiento se enriquece mediante la colaboración, la práctica como punto de partida de la formación y la investigación sobre la práctica (Ponte, 2012).

En este orden de ideas, el paradigma que orienta el estudio es de corte cualitativo, pues se interpretan las interacciones del colectivo como fenómenos sociales que están atravesados por la subjetividad de los maestros. Es decir, de acuerdo con Borba (2012), el conocimiento se convierte en un esfuerzo humano que tiene un componente subjetivo, cuyos aspectos deben ser representados por una investigación cualitativa, la cual “guía y da atención a las personas y a sus ideas, procura dar sentido a discursos y narraciones que serían silenciosas” (D’Ambrosio, 2008, p. 19).

Para ello, el camino metodológico propuesto es el siguiente: diseño y revisión de algunas tareas de formación con doblado de papel; generación de procesos de producción de conocimiento al interior de algunos colectivos, con el fin de evaluar dichas tareas; conformación del colectivo de maestros propio del estudio y generación de procesos de producción de conocimiento en el mismo, considerando tanto aspectos disciplinares de la geometría, como el análisis de su enseñanza, lo que implica el diseño y revisión de actividades para los estudiantes. Por lo tanto, el tipo de estudio que guía este trabajo es una investigación de diseño.

Esta categoría de metodología ha ganado una atención significativa en las últimas décadas en los Estados Unidos (Doerr & Wood, 2006; Lesh, 2002), debido principalmente a que, según Lesh (2002), el objetivo es que los participantes (cuyas maneras de pensar están siendo investigadas) diseñen artefactos de pensamiento revelador usando un proceso que envuelve una serie de ciclos de prueba y revisores iterativos. En el caso

de la presente investigación, no se usan este tipo de ciclos o iteraciones, pues el paradigma que la orienta es cualitativo; sin embargo, se diseñan tareas de formación, con doblado de papel, que permiten que las formas de pensar de los participantes evolucionen y se hagan más claras (Lesh, 2002).

Conformación del primer colectivo

Un taller² con una duración de ocho horas, conformado por maestros, acorde con las pretensiones del estudio, nos brindó el espacio como investigadores para que, durante su desarrollo, pudiéramos tomar información relevante para el presente trabajo y hacer un primer pilotaje de las tareas de formación para un colectivo. El objetivo general del taller fue brindar herramientas conceptuales y procedimentales a los maestros participantes, desde el área de las matemáticas, que permitan un acompañamiento integral de los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes, para promover su acceso y permanencia en el sistema educativo universitario. Para la consecución del objetivo, se abordaron algunas actividades con doblado de papel, como la trisección de un ángulo y la axiomática de Huzita - Hatori de la geometría del doblado de papel (Santa & Jaramillo, 2010).

Al inicio del taller, de manera conjunta, tanto maestros como investigadores hicieron, de forma general, una intervención sobre su rol. Presentaron una breve caracterización de los estudiantes con los que actualmente desarrollan sus prácticas pedagógicas. Se suscitaron algunas preguntas intencionadas, cuyo propósito fue generar un espacio de discusión inicial y de debate, donde cada uno pudiera dar su opinión, con argumentos válidos, desde sus experiencias y necesidades.

La polémica generada por las preguntas permitió que los maestros posibilitaran un ambiente de cierta confianza, respeto y apoyo, indispensable para la conformación de un colectivo. Es importante mencionar que esta actividad inicial no garantiza que el grupo se convierta en cooperativo o, en el mejor de los casos, colaborativo. Las relaciones de confianza construidas fueron muy débiles, pero permitieron, de manera posterior, interacciones del colectivo con el doblado de papel; estas interacciones se han analizado, con el propósito de hacer una caracterización aproximada de los procesos de producción de conocimiento geométrico que pueden emerger de un colectivo de maestros-con-doblado-de-papel.

Caracterización de los participantes: colectivo de maestros

El colectivo que se conformó, gracias a su participación voluntaria y gratuita en el taller, fue de cinco maestros: una maestra de una institución educativa; tres maestros universitarios, uno de los cuales ha tenido experiencia en bachillerato; y una maestra en formación. Fue un grupo heterogéneo, pero que, en todo momento, mostró respeto por el otro, así la diferencia en años de experiencia docente de los participantes fuera tan marcada. Los seudónimos que se usarán para nombrar a cada uno de los participantes serán los nombres de algunos personajes de la serie Harry Potter, de la escritora Rowling (2000), atendiendo a algunas particularidades que tienen en común con los maestros. A continuación, se dará una breve caracterización de cada uno de ellos:

Severus: ingeniero de profesión. Profesor de cátedra, con más de 20 años de experiencia, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia. Manifestó su interés por mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes.

Albus: matemático y Magíster en Ingeniería. Profesor de cátedra, con más de veinte años de experiencia, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia. También manifestó gran interés por mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes.

² Taller de "Enseñanza de las Matemáticas" programado en el marco del Programa Desarrollo Pedagógico Docente, de la Vicerrectoría de Docencia de la Universidad de Antioquia, octubre de 2014.

Remus: Licenciado en Matemáticas y Física. Magíster en Enseñanza de las Ciencias. Profesor de cátedra de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Tiene, aproximadamente, ocho años de experiencia docente tanto a nivel secundario como universitario. Su participación en el taller, se debió a su gran interés por conocer herramientas para posibilitar procesos de aprendizaje en los estudiantes.

Molly: profesora de Química y Matemáticas. Estudiante del programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Es profesora de una institución educativa del municipio de Envigado. Decidió participar en el taller porque podría aportarle a su trabajo de profundización de maestría.

Hermione: estudiante del noveno semestre del programa Licenciatura en Matemáticas y Física, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Su participación en el taller se debe a su interés por la temática abordada, que podría aportarle a su proyecto de grado.

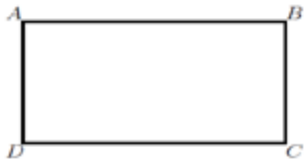
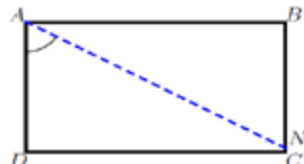
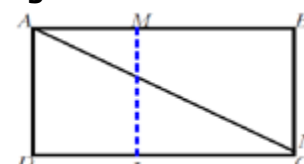
Considerando las interacciones del grupo, se pudo percibir que se conformó un colectivo de maestros o maestros en formación “dispuestos a compartir espontáneamente algo de interés común, pudiendo presentar visiones y entendimientos diferentes sobre los conceptos matemáticos, los saberes didáctico-pedagógicos y experiencias relativas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática” (Fiorentini, 2008, p. 49). En otras palabras, los maestros vinculados al colectivo lo hicieron por voluntad propia e interés en cualificar su desarrollo profesional docente. El ambiente en el colectivo fue de apoyo, espontaneidad, cierta confianza y respeto.

Tarea de formación desarrollada

Una de las tareas de formación propuestas en el estudio, es la trisección de un ángulo agudo, mediante el doblado de papel. Con esta actividad se busca generar procesos de interacción en el interior del colectivo que permitan, a su vez, procesos de producción de conocimiento, tanto desde el aspecto disciplinar de la geometría, como de su enseñanza. Esta actividad se divide en cinco momentos (Santa & Jaramillo, 2015), a saber:

Momento 1: Construcción.

A continuación, se presentan los pasos para la realización de la construcción en las figuras 2 a 9 (Santa & Jaramillo, 2015, pp. 8 - 9).

Paso	Construcción
<p>Tome una hoja de papel de forma rectangular y marque sus esquinas con $ABCD$; tome el ángulo $\angle A$ como referencia. Forme en este un ángulo agudo haciendo un doblez \overline{AN}.</p>	 <p>Figura 2. Paso 1.</p>
<p>Remarque el doblez \overline{AN} y desdoble nuevamente. Considere el ángulo agudo $\angle DAN$ como el ángulo a trisecar. Tenga en cuenta que está formado por el doblez que ha hecho y el lado \overline{AD} del ángulo recto que tomó de referencia.</p>	 <p>Figura 3. Paso 2.</p>
<p>Construya un doblez paralelo a \overline{AD}. Desdoble y llámelo \overline{ML}. Para garantizar la existencia de algunos dobleces en la hoja de papel, se sugiere que la distancia de este doblez a \overline{AD} sea un poco menor que la mitad de la medida de \overline{AB}.</p>	 <p>Figura 4. Paso 3.</p>

Lleve el lado \overline{AD} sobre el doblado \overline{ML} para formar una nueva paralela \overline{PQ} que equidiste de las dos anteriores.

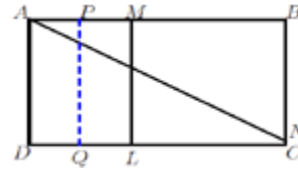


Figura 5. Paso 4.

Construya un doblado que lleve el punto A del ángulo de referencia sobre la paralela \overline{PQ} y, a su vez, el punto M lo lleve sobre el doblado \overline{AN} . Nómbrelo \overline{ZJ} .

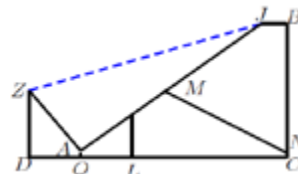


Figura 6. Paso 5.

Note que se ha formado una simetría y la parte que ha doblado es un triángulo rectángulo (ΔZAJ). Nombre E al punto donde se corta \overline{PQ} con \overline{ZJ} . Construya la mediatriz del segmento \overline{ZE} y nómbrela \overline{GH} . Tenga en cuenta que esta mediatriz se intercepta con el lado \overline{CD} del rectángulo en el punto H. Desdoble y prolongue el doblado \overline{GH} ; note que A pertenece a dicha prolongación.

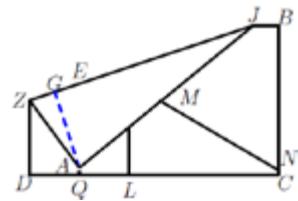


Figura 7. Paso 6a.

Construya la bisectriz \overline{AK} del ángulo $\angle HAN$. De esta manera, el ángulo agudo $\angle DAN$ queda dividido en tres ángulos iguales $\angle DAH$, $\angle HAK$ y $\angle KAN$.

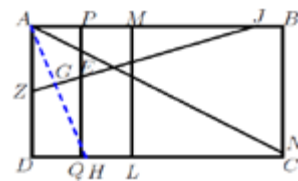


Figura 8. Paso 6b.

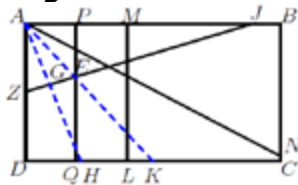


Figura 9. Paso 7.

Momento 2: Análisis de los axiomas de la geometría del doblado de papel.

Posterior a la construcción de la trisección, se les propone a los maestros una revisión de cada uno de los pasos para evidenciar algunas implicaciones geométricas euclidianas; adicionalmente, se les pide, de manera formal y argumentada, una explicación sobre la trisección del ángulo agudo. Finalmente, se les solicita una lista de proposiciones, que consideren verdaderas, con respecto a la geometría del doblado de papel (Santa & Jaramillo, 2010), basada en la construcción realizada.

Momento 3: Construcción de Arquímedes.

Después de que los maestros analizan la construcción a la luz de la Geometría Euclidiana, se les presenta una nueva construcción, pero no mediante el doblado de papel, sino con regla y compás. De acuerdo con Santa y Jaramillo (2015):

Entre los aportes a las ciencias, Arquímedes (287 - 212 a. C.) diseñó un método fácil e interesante para trisecar cualquier tipo de ángulo. Sin embargo, su ingeniosa construcción no resuelve el problema de trisección con compás y regla no graduada, pues se vale de dos marcas en esta para trasladar una distancia determinada. (p. 10)

Las instrucciones para la construcción se exponen a continuación (ver figura 10):

Sea $m(\angle AOB) = x$ el ángulo dado. Se traza por el vértice O una circunferencia de radio r . Se prolonga el segmento \overline{AO} del ángulo inicial y se traza por B una secante hasta un punto P (que pertenece a la prolongación) que corte a la circunferencia en el punto M , tal que $m(\overline{MP}) = r$ (es necesario una regla graduada para transportar dicha medida). Entonces $m(\angle NOM) = z$ es la tercera parte del ángulo dado. (Santa & Jaramillo, 2015, p. 10)

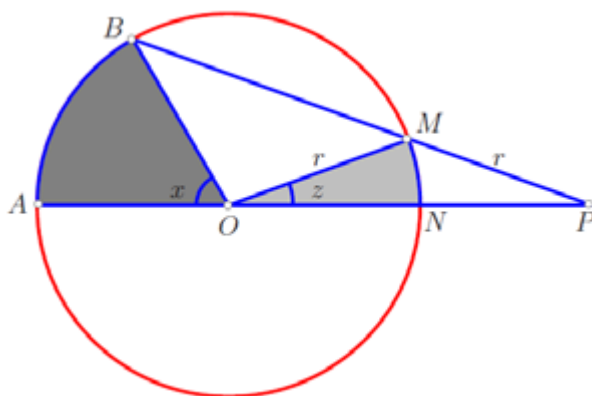


Figura 10. Trisección de Arquímedes (Santa & Jaramillo, 2015, p. 10).

Se les solicita a los maestros que analicen dicha construcción con base a la axiomática euclidiana, para probar que el ángulo $\angle NOM$ es la tercera parte del ángulo $\angle AOB$. Pueden presentarse varias demostraciones.

Momento 4: Relación de la construcción de Arquímedes con la del doblado de papel.

Posterior al reconocimiento de la trisección de Arquímedes como un método viable para trisecar un ángulo, se retoma nuevamente la construcción del doblado de papel y en esta se realizan algunos dobleces auxiliares.

Considere el ángulo $\angle DAN$ como el ángulo trisecado. Si se traza el segmento \overline{RM} entonces $\overline{RA} \cong \overline{RM}$; así mismo, los ángulos $\angle ARP$, $\angle PRM$ y $\angle DAN$ son congruentes. Puede dibujar una circunferencia de radio \overline{RM} y centro R con el fin de visualizar mejor lo que se pretende lograr. En el momento de hacer aquel doblez en el que deslizaba el punto A sobre \overline{PQ} y, a su vez, hacía coincidir el punto M con \overline{AN} , verifique el lugar exacto donde ubica el radio \overline{AR} . Trate de visualizarlo y dibujarlo en su hoja. Tenga en cuenta siempre la construcción final que se hizo con el doblado de papel. Verifique que la simetría que proporciona el doblez \overline{ZJ} permite garantizar que $\angle P'R' \cong$

$\angle EAF$ (el punto F garantiza la conservación de la distancia $\overline{A'F}$ y \overline{AF}). La Geometría del doblado de papel muestra que $\overline{RR'} \parallel \overline{AA'}$. Luego, $\angle RR'A \cong \angle RAR'$. De donde, $\overline{RR'} \cong \overline{A'R'} \cong \overline{AR} \cong \overline{RM}$. El punto M debe pertenecer a la recta que define el segmento $\overline{A'R'}$ precisamente por la simetría del doblez \overline{ZJ} .

Se espera que los maestros retomen los elementos que se tienen: $\angle PRM$ es el ángulo a trisecar; $\angle PA'R'$ es la tercera parte de $\angle DAN$ y por transitividad, de $\angle PRM$. $\overline{RR'}$ es congruente con $\overline{A'R'}$ y con \overline{RM} . Finalmente M pertenece a la recta que define $\overline{A'R'}$. De esta manera, podrían concluir que son elementos suficientes para determinar que se ha hecho la trisección de Arquímedes en la hoja de papel (ver Figura 11).

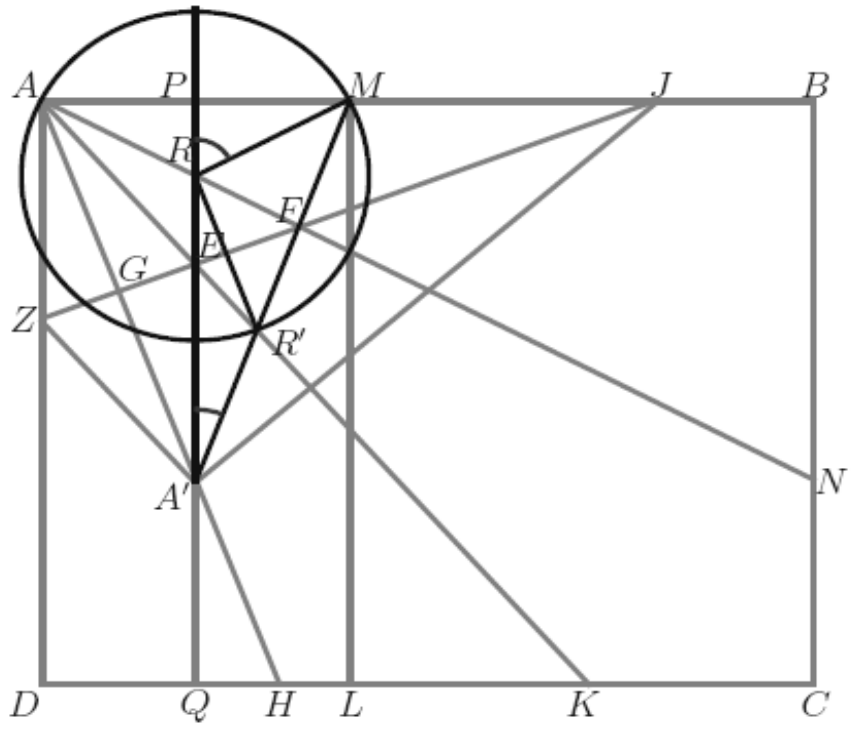


Figura 11. Relación de la trisección del doblado de papel con el método de Arquímedes (Santa & Jaramillo, 2015).

Momento 5: Proceso de evaluación.

Para finalizar el trabajo con el colectivo de maestros, se dialoga sobre las siguientes preguntas (Santa & Jaramillo, 2015):

- ¿Qué se aprendió del desarrollo de la actividad?
- ¿Cómo fue su proceso de aprendizaje?
- ¿Las discusiones en el colectivo de maestros contribuyeron con la producción de conocimiento geométrico (Villarreal, 2012)? ¿Por qué?

¿Qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo-con-doblado-de-papel?

Resultados parciales y discusión

Momento 1: Construcción

Durante la construcción, los maestros exhibieron ciertas dudas con respecto a procedimientos del doblado de papel, pues algunos de ellos no estaban tan familiarizados con este medio. Asumiendo el papel de investigadores, observamos cada una de las construcciones de los participantes, para garantizar que se estuvieran siguiendo los pasos explicados. Al mismo tiempo que se les daban las instrucciones pertinentes para la elaboración, se les hacían preguntas clave, relacionadas con la geometría del doblado. Una, en particular, suscitó muchas dudas y generó controversia.

En el paso 6a, donde se pedía que se construyera *la mediatriz del segmento \overline{ZE} y se nombrara \overline{GH}* , se hizo la pregunta: ¿se puede decir que se forma un ángulo recto? Todos los profesores asumieron que sí, que se visualizaba un ángulo de este tipo (ver Figura 12).

Sin embargo, se les preguntó ¿cómo justificar que ese ángulo es realmente recto? Los participantes se quedaron pensando, pero Remus expuso que si se desdoblaba la hoja, se formaba un plano cartesiano. Severus solicitó alguna pista. Frente a eso, se les preguntó, señalando el doblez \overline{ZJ} , ¿qué ángulo es este? En este momento, Severus afirmó que la pregunta era irregular, que no había un sistema cartesiano asociado y que no se podía hablar de la medida de ángulos. Pero tal afirmación fue debatida por Albus, quien manifestó que en la época de los griegos sí se hablaba de medidas de ángulos y que los métodos cartesianos se habían propuesto muchísimo después. En este sentido, el último profesor expresó que en la construcción había un ángulo de un giro asociado a un punto particular y que, como se visualizaba en los dobleces, había cuatro ángulos iguales que convergían en este punto. Por lo tanto, $360^\circ/4$ equivale a 90° .

Luego, el ángulo es recto. Todos los demás profesores estuvieron de acuerdo con la demostración³.

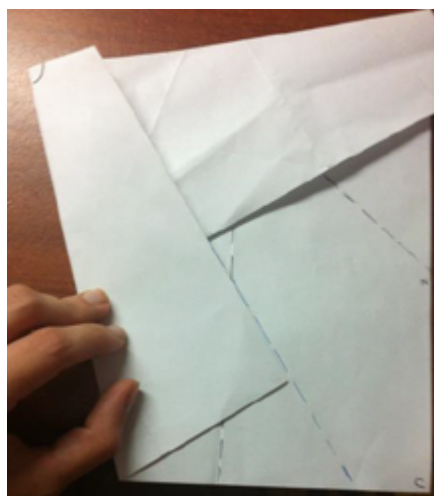


Figura 12. Construcción con doblado de papel del maestro Remus.

³ Mostración: "acercamiento de carácter operatorio y multisensorialmente tangible a conceptos científicos de tipo matemático, físico, biológico o químico" (Monsalve & Jaramillo, 2003, p. 16).

Momento 2: Análisis de los axiomas de la geometría del doblado de papel

Después de realizada la construcción, se les preguntó a los maestros ¿por qué se puede decir que el ángulo $\angle DAN$ quedó trisecado? Inicialmente, Remus afirmó que los triángulos $\triangle AGZ$ y $\triangle AGE$ son congruentes por el criterio lado ($\overline{AG} \cong \overline{AG}$, lado igual), ángulo ($\angle AGZ \cong \angle AGE$, por ser rectos), lado ($\overline{ZG} \cong \overline{GE}$, por construcción con doblado de papel); Albus no estuvo de acuerdo al principio, porque él consideraba que como los triángulos eran rectángulos, entonces el ángulo recto no se tenía en cuenta para el criterio de congruencia. Sin embargo, Remus le explicó nuevamente su postura. Luego, Albus estuvo de acuerdo y estableció que es el mismo criterio cateto - cateto, porque ambos triángulos son rectángulos. Posteriormente, se determinó que $\angle HAK \cong \angle KAN$, por construcción, al realizarse la bisectriz del ángulo $\angle HAN$. Esto permitió concluir que el ángulo $\angle DAN$ quedó dividido en tres partes iguales (ver Figura 9).

Posteriormente, los maestros debían hacer una lista de proposiciones que consideraran verdaderas, con respecto al doblado de papel, de acuerdo con la construcción realizada. Severus manifestó no entender lo que se le preguntaba y solicitó alguna pista; los demás profesores tampoco daban señal de comprender lo que se les pedía. Por lo tanto, se les dio un ejemplo: el primer doblado surgió al considerar dos puntos en la hoja de papel. Este ejemplo los llevó a determinar que por dos puntos pasa un único doblado. De la misma manera, Albus precisó que por un punto pasan infinitos dobleces. Los pasos de la construcción, permitieron establecer las siguientes proposiciones (ver Axiomas de Huzita-Hatori en Santa & Jaramillo (2010)):

- Si se lleva un doblado sobre sí mismo, en un punto determinado, se construye una perpendicular.
- Si se lleva un punto sobre otro, se construye la mediatriz del segmento que determinan los puntos.
- Si se lleva un doblado sobre otro y estos son paralelos, se construye una tercera paralela que equidista de los dos anteriores.
- Si se lleva un doblado sobre otro, se construye una bisectriz.
- Hay un doblado que permite llevar un punto sobre un doblado determinado, al mismo tiempo otro punto sobre un segundo doblado. Severus comentó, que ese doblado era muy particular pues todavía no le encontraba alguna implicación geométrica euclidiana.

Momento 3: Construcción de Arquímedes

Después del análisis de la construcción con doblado de papel, se les mostró a los maestros una construcción particular diseñada por Arquímedes (Courant & Robbins, 2002), para resolver el antiguo problema clásico de los griegos: la trisección de un ángulo con una regla no graduada y un compás. Se les preguntó a los participantes si el ángulo z es la tercera parte del ángulo x y cómo se demostraría tal afirmación. Pero Severus manifestó que a esa construcción le faltaba determinar la ubicación exacta del punto M o P , para poder ser válida. Sin embargo, Hermione le precisó que así la proponía Arquímedes. De la misma manera, Molly estableció que en el enunciado no se determinaba dicha ubicación. En este momento, se aseveró que esa construcción no resolvía el problema de los griegos, pues Arquímedes necesitó hacer dos marcas en la regla, para poder afirmar que la medida del segmento \overline{PM} era igual al radio de la circunferencia.

Se dieron muchas discusiones alrededor de la demostración de esta construcción. Incluso, se lanzaron conjeturas visuales sobre puntos y segmentos, en particular sobre el punto M , pero se iban invalidando gracias a las interacciones del colectivo. Finalmente, se les expuso a los maestros una manera de demostrar la validez de la construcción, a través del uso de teoremas sobre ángulos centrales y externos en una circunferencia.

Momento 4: Relación de la construcción de Arquímedes con la del doblado de papel

Para dar por terminada la actividad de la construcción de la trisección de un ángulo agudo, se les mostró a los maestros una figura con unos dobles auxiliares, junto con algunas observaciones para el respectivo análisis. La visualización que permitía la construcción con el doblado de papel, junto con las interacciones del colectivo y las ideas plasmadas, posibilitó concluir que el método de Arquímedes era el que se realizaba, de manera implícita, en el método del doblado. Esta conclusión dejó perplejos y, a la vez, muy motivados a los maestros, puesto que una propiedad geométrica abstracta podía cobrar sentido al materializarse en una hoja de papel, hecho que podría consolidar la comprensión de conceptos y procedimientos geométricos en el aula de clase. Finalmente, los maestros expresaron estar interesados en otras construcciones y en cómo llevar este tipo de actividades al aula de clase, expresando que es posible producir conocimiento geométrico a través del doblado de papel.

Proceso de evaluación

A continuación, se muestran las respuestas de dos de los maestros del colectivo, a las preguntas del proceso de evaluación:

A la primera pregunta ¿qué se aprendió del desarrollo de la actividad?, Molly respondió: “El doblado de papel es una técnica flexible, innovadora, en la cual se puede trabajar con precisión, permitiendo trabajar algunos aspectos geométricos; la recreación de Arquímedes en la trisección del ángulo, se apreció perfectamente en el doblado de papel, lo que me generó curiosidad y motivación. Quedé inquieta por observar otras demostraciones con el doblado de papel”.

A la segunda pregunta ¿cómo fue su proceso de aprendizaje?, Molly mencionó: “Mediante un conversatorio del colectivo muy agradable, y una metodología semisocrática muy bien intencionada, además de una clara exposición”.

A la tercera pregunta ¿las discusiones en el colectivo de maestros contribuyeron con la producción de conocimiento geométrico? ¿Por qué?, Remus precisó: “Sí, cada uno de los participantes hacía sus aportes desde su experiencia, y si había dificultades, nos ayudábamos a sacar conclusiones o a aportar estrategias en pro de la solución a las situaciones planteadas por el colectivo”.

A la última pregunta, ¿qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo-con-doblado-de-papel?, Remus aseveró: “La elaboración de figuras y de objetos con doblado de papel llaman la atención de los estudiantes. Pero debe ir tras un propósito y no doblar por doblar. La intención debe primar en el docente para que así el estudiante descubra algunos teoremas, axiomas o construcciones por sí mismo”.

Algunas conclusiones

El proceso de evaluación de algunos maestros y el desarrollo del taller, como tal, nos permiten aproximarnos a tres ideas fundamentales relacionadas con los procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros-con-doblado-de-papel, que aporten a su desarrollo profesional docente:

- El doblado de papel es un medio que posibilita la comprensión de algunos conceptos y procedimientos inmersos en la actividad de doblar, dado que propicia procesos de visualización, procesos de experimentación, generación y validación de conjeturas visuales, pruebas visuales, procesos de argumentación, entre otros; estos aspectos contribuyen con la producción de conocimiento geométrico del colectivo.

- El conversatorio, las interacciones entre los maestros con el doblado de papel y con los investigadores, los diálogos reflexivos, las apreciaciones de cada maestro desde su experiencia y las puestas en común sobre conceptos, procedimientos geométricos y situaciones relacionadas con su enseñanza, pueden generar procesos de producción de conocimiento geométrico.
- Las actividades diseñadas con doblado de papel deben estar dotadas de algún sentido para el colectivo, de tal manera que permitan la visualización de conceptos y propiedades geométricas, en la experimentación de las construcciones concretas.

Por otro lado, se percibió que los profesores, desde sus prácticas pedagógicas, podían establecer que la geometría era una de las ramas más importantes de las matemáticas, pero que no se estaba considerando en las aulas de clase antioqueñas por dos razones: (1) los maestros no se sienten capacitados para enseñarla y (2) porque normalmente se ha dejado para los últimos períodos del año escolar. Una causa de la primera razón es que los cursos de geometría que se reciben en la universidad, en programas de licenciatura, son formales y demostrativos, y no propician herramientas suficientes para que los maestros en formación puedan generar, más adelante, procesos de enseñanza y aprendizaje de ella.

Finalmente, vale la pena aclarar que las anteriores observaciones hacen parte de una primera aproximación al análisis de la producción de conocimiento que se genera en un colectivo de maestros-con-dobla-do-de-papel, al aprovechar la conformación del colectivo lograda en el taller de “Enseñanza de las Matemáticas”. Estas observaciones serán tomadas como referentes para un análisis posterior de los procesos que se suscitarán en un nuevo colectivo conformado específicamente para los fines del estudio, en el marco del proyecto de investigación de COLCIENCIAS-CAPES, antes mencionado.

Referencias

- Aballe, M. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *UNO*, 25, 89-107.
- Borba, M. (2002). Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. En: Sociedad Brasileira de Psicología de Educación Matemática (Comp.), *I Simposio Brasileiro de Psicologia de Educación matemática* (pp. 135-146). Brasil: UTP.
- Borba, M. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education*, 44(6), pp. 801 - 814. Doi: 10.1007/s11858-012-0436-8
- Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.
- Courant, R. & Robbins, H. (2002). ¿Qué son las matemáticas? *Conceptos y métodos fundamentales*. México: Fondo de Cultura Económica.
- D'Ambrosio, U. (2008). Prefacio. En M. Borba y J. Araújo (Comp.), *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (pp. 9 – 20). México: Limusa.
- Doerr, H. & Wood, T. (2006). Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In M. Borba (Ed.), *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Fiorentini, D. (2008). ¿Investigar prácticas colaborativas o investigar colaborativamente? En M. Borba y J. Araújo. (Ed.), *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (pp. 43-72). Balderas, México: Limusa.
- ICMI (1998) Appendix: Discussion Document for an ICMI Study. En: C. Mammana and V. Villani (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 2st Century* (pp. 337-346). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In: L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 27 – 49). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Ministerio de Educación Nacional MEN (2004). *Serie Documentos: Pensamiento geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

- Monsalve, O. & Jaramillo, C. (2003) El placer de doblar papel, mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Educación y Pedagogía*, XV(35), 11 – 25.
- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de Matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 93-98). Barcelona: Graó.
- Ponte, J. & Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practice. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Róterdam, The Netherlands: Sense.
- Rowling, J. (2000). *Harry Potter y la cámara secreta*. España, Barcelona: Emecé Editores.
- Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Santa, Z. & Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 31, 338-362. Recuperado el 13 de enero de 2015 de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/48/105>
- Santa, Z. & Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.
- Santa, Z. & Jaramillo, C. (2015). Producción de conocimiento geométrico de un colectivo–con–doblado de papel: el caso de la trisección de un ángulo. En: *Memorias de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México: Comité Interamericano de Educación Matemática. Recuperado el 13 de enero de 2015 de: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/516/236
- Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. En: *Innovación y Experiencias VEsC*, 3(5), 73 – 94.