

Cómo citar el artículo

Suárez-Restrepo, L. F. & Castro-Gordillo, W. F. (2017). Génesis instrumental en el proceso de aprendizaje: el software wxMaxima y la función polinómica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 106-125. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/815/1333>

Génesis instrumental en el proceso de aprendizaje: el software wxMaxima y la función polinómica

Luis Fernando Suárez-Restrepo

Ingeniero de sistemas
Magíster en educación
Docente de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste
lufesuremo@gmail.com

Walter Fernando Castro-Gordillo

Licenciado en educación: especialidad en Matemática y Física Matemático
Máster en Matemáticas
Máster en didáctica de las Matemáticas
Doctor en didáctica de las Matemáticas
Profesor asociado, Universidad de Antioquia
walter.castro@udea.edu.co

Recibido: 24 de febrero de 2016.

Evaluado: 8 de agosto de 2016.

Aprobado: 19 de agosto de 2016.

Tipo de artículo: investigación científica y tecnológica.

Resumen

Esta investigación aborda el uso del software Maxima y su interfaz gráfica para Microsoft Windows, wxMaxima, en un curso de matemáticas operativas de primer semestre de Ingeniería Agropecuaria en la Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste. Algunas características de la génesis instrumental, el enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción, y la orquestación instrumental fueron usadas para estudiar la manera en el que un *software* es usado por los estudiantes para resolver problemas matemáticos relacionados con los polinomios. Los resultados muestran que los estudiantes pueden articular recursos provistos por el *software* y los adecúan para responder cuestiones matemáticas; sin embargo, algunos estudiantes se apegan a los procedimientos algorítmicos para validar sus respuestas. Se logra identificar, además, un nuevo componente en la génesis instrumental que hemos denominado "cooperación", reconfigurando el proceso de génesis instrumental.

Palabras clave

Aprendizaje, Artefacto, Génesis instrumental, Instrumento, *Software*.

Instrumental Origin in the Learning Process: The wxMaxima and the Polynomial Function

Abstract

This research deals with the use of Maxima software and its graphical interface for Microsoft Windows, wxMaxima, in a first-year basic mathematics course of Agricultural Engineering in the University of Antioquia, Southeast branch campus. Some features of the instrumental origin, the onto-semiotic approach of the cognition and the training, and the instrumental orchestration were used for studying the way in which a software program is used by the students in order to solve mathematical problems related to polynomials. The results show

that the student can associate the resources provided by this software program and adapt them for answering mathematical questions; however, some students adhere to algorithmic procedures for validating their answers. A new component in the instrumental origin was also identified which we have called "cooperation" reconfiguring with this the process.

Keywords

Learning, Artifact, Instrumental origin, Instrument, Software.

Genèse instrumentale dans le processus d'apprentissage : le logiciel wxMaxima et la fonction polynomiale

Résumé

Cet article aborde l'utilisation du logiciel Maxima et son interface graphique pour MS Windows, wxMaxima, dans un cours de mathématiques basiques de génie agricole dans l'université d'Antioquia, siège sud-ouest, Colombie. Quelques caractéristiques de la genèse instrumentale, l'approche onto-sémiotique de la cognition et de l'enseignement, et l'orchestration instrumentale ont été utilisés pour étudier la manière dans laquelle le logiciel est utilisé par les étudiants pour résoudre problèmes mathématiques liés aux polynômes. Les résultats montrent que les étudiants peuvent d'articuler ressources fournis par le logiciel et les adapter pour répondre des questions mathématiques ; cependant, quelques étudiants s'attachent aux procédures algorithmiques pour valider ses réponses. On a identifié, un nouvel élément dans la genèse instrumentale qui nous avons appelé « coopération », ce qui reconfigure le processus d'elle.

Mots-clés

Apprentissage, Appareil, Genèse instrumentale, Instrument, Logiciel.

Introducción

La matemática es el estudio de la medida, las formas, los patrones, la variabilidad y el cambio, y se ha derivado de nuestros esfuerzos para comprender el mundo natural (NBEET, 1995). En la enseñanza de las matemáticas se debe considerar que ocurre un cambio no solo en el contenido temático aprendido por el estudiante, sino en el discurso y comunicación manifestada por él para interactuar comprensivamente con sus colegas (Sfard, 2001).

La comunicación sobre ideas matemáticas requiere de un “discurso matemático” (Sfard, 2001) e involucra actividades y prácticas matemáticas que se realizan en un contexto cultural y social. El discurso matemático involucra todas las maneras en las que la matemática se hace: en el lenguaje, en los libros de textos, en las conversaciones matemáticas, en las clases de matemáticas y en la aplicación del conocimiento matemático (Wood & Perrett, 1997); sin embargo, prestamos atención a la comunicación más que al discurso.

Culturalmente se reconoce la importancia de las matemáticas y de su uso extramatemático, que como disciplina comenzó a organizarse por la necesidad de enseñarla a los escribas alrededor del 3000 a. C. (Hoyrup, 1994), y con el paso del tiempo se adicionaron aplicaciones a los contenidos escolares; muestra de esto se puede apreciar en los ejemplos de práctica del papiro de Hames y de algunas tabletas de cerámica babilónicas que se asemejan a la manera como las matemáticas son enseñadas hoy en día (Fowler & Robson, 1998).

Pese a la importancia de las matemáticas en nuestra cultura, para la mayoría de los estudiantes son difíciles, poco agradables y poco útiles; por lo cual manifiestan cierto desdén hacia ellas y hacia su estudio (Flores, Gozalez, & Rodriguez, 2013). Tal desdén se aprecia antes de ingresar a la universidad cuando, durante la promoción que se hace a los futuros aspirantes de los programas académicos de la Universidad de Antioquia en las instituciones educativas del suroeste antioqueño, suelen mostrar interés por las carreras que tienen pocos o ningún curso de matemáticas.

El curso de matemáticas operativas (MO) es un curso genérico de primer semestre en el cual se estudian polinomios y funciones elementales de variable y valor real. Este curso tiene un bajo porcentaje de aprobación y un alto porcentaje de cancelación. Ninguna acción sistemática se ha emprendido para aumentar la aprobación en el curso, lo cual tiene consecuencias económicas y sociales como marginación, perpetuación de la pobreza y limitación de recursos por parte del Estado, que contribuyen a incrementar el problema educativo (Quiroz, 2010). En Colombia existen algunos documentos¹ que informan sobre el problema de la deserción y de los programas de retención en las universidades colombianas, y por ello es necesario buscar alternativas que permitan abordar estos aspectos desde la motivación del estudiante por el aprendizaje de las matemáticas.

Una alternativa para mejorar los niveles de aprobación es motivar a los estudiantes para que aprendan matemáticas y cambien su actitud negativa hacia ellas. La motivación puede incrementar sus conocimientos y habilidades básicas (Ospina, 2010). Tradicionalmente se ha utilizado la calculadora como herramienta

¹ <http://www.epigrafe.com/preview/editoriales/unisabana/persistencia/index.htm> (consultado noviembre 11 de 2015).

para agilizar los cálculos y obtener resultados precisos; sin embargo, el ordenador ofrece mayor capacidad computacional, a la vez que existen programas comerciales o con características libres (Geogebra, Cabri, Derive y wxMaxima, entre otros) que pueden ser usados para abordar los contenidos matemáticos desde una perspectiva más participativa, sin desfavorecer el rigor matemático (Pizarro, 2009).

Marqués (2001) y Moreno (2012) resaltan efectos del uso de las TIC en el proceso de aprendizaje, entre los que citan la toma de decisiones ante opciones ofrecidas por una aplicación, un dispositivo o un objeto matemático.

En la enseñanza es común observar el uso de computadores, presentaciones de PowerPoint, consultas basadas en páginas de internet o uso de las aplicaciones ofimáticas (Word, Excel, PowerPoint) para el desarrollo de diversas actividades que orientan la enseñanza. Los estudiantes centran su atención en aplicaciones que puedan beneficiar su proceso de aprendizaje o que son, en muchas ocasiones, sugeridas por los docentes. El propósito de esta investigación es analizar cómo los estudiantes incorporan el *software* wxMaxima a su aprendizaje de temas relacionados con los polinomios y con funciones elementales.

De tal suerte que se ha decidido indagar lo siguiente: ¿cómo es utilizado el software wxMaxima en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas Operativas por estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste?

109

Génesis instrumental

La disponibilidad de un artefacto que tiene la capacidad potencial de satisfacer las necesidades de un sujeto no es suficiente para que sea usado con arreglo a fines; en ese sentido, la disponibilidad de ordenadores y *software* para resolver tareas matemáticas en un ambiente escolar debe acompañarse de acciones específicas por parte del profesor para que los estudiantes usen los artefactos en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas; el sujeto debe aprender a usar el artefacto para resolver problemas. La génesis instrumental refiere a una construcción progresiva de uso de un artefacto por un actor, con un propósito en un ambiente específico (Trouche, 2004).

En tanto que se propone el uso de nuevas tecnologías para ayudar en el aprendizaje de las matemáticas (Flecknoe, 2002; Hannafin, Hall, Land & Hill, 1994; Harris, 2002), conviene revisar propuestas que consideren el papel de los artefactos en el aprendizaje.

El aprendizaje de las matemáticas ha experimentado la influencia de las nuevas tecnologías. Rabardel (1995) propone un enfoque en el que se describe la génesis del instrumento por el sujeto, y resalta la importancia de la actuación humana que construye un instrumento mediante estructuras cognitivas. La génesis instrumental

planteada por este autor se ocupa de dos dimensiones: instrumentalización e instrumentación. Estas se configuran en la interacción entre el sujeto y un artefacto, entendiéndose este último como cualquier cosa susceptible de ser usada y que ha sido elaborada para inscribirse en actividades intencionales.

En la instrumentalización se estudian la evolución, selección y funciones del artefacto, otorgándole características por medio de tareas y de esquemas.

La instrumentalización del artefacto ocurre cuando se le dota de potencialidades y se le transforma para aplicaciones específicas (Artigue, 2002). Trouche (2004) la define como un proceso de diferenciación del artefacto mismo que puede pasar por diferentes etapas: descubrimiento, personalización y transformación. La instrumentación, por su parte, analiza la evolución de los esquemas de uso y su funcionamiento para comprender las limitaciones y potencialidades del instrumento. Trouche (2004) la define como el proceso donde el instrumento afecta al sujeto; es decir, permite que el sujeto desarrolle su actividad y que elabore esquemas de acción instrumentada que le permitan construir conocimiento matemático. Artigue (2002) la define como una acción dirigida hacia el sujeto, y que cada vez lo conduce al desarrollo o a la apropiación de esquemas de acción instrumentada que están orientados hacia la comprensión de las potencialidades y de las limitaciones del artefacto, para un desarrollo óptimo en la solución de una tarea específica. Es así que un instrumento es concebido

como una entidad mixta que comprende a la vez al sujeto y al artefacto, a través de dos componentes, uno artefactual que se identifica directamente con el artefacto o parte de él, y otro cognitivo, al que corresponden las técnicas y los esquemas mentales que el sujeto desarrolla y aplica mientras usa el artefacto. (Pérez, 2014, p. 4).

En esta investigación, el proceso de génesis instrumental ha permitido identificar varios aspectos esenciales en la incorporación del *software* al proceso de aprendizaje de los estudiantes. Inicialmente, se identifica la presencia de un sujeto —docente— que iniciaría el proceso artefactual; es decir, estudia y analiza diferentes artefactos disponibles, identificando sus características y potencialidades para planificar actividades o esquemas de uso, realizando un proceso de instrumentalización. De otro lado se encuentra otro sujeto —estudiante— que, de acuerdo con los esquemas de uso planificados por el docente, realiza acciones sobre el artefacto, explorando e identificando posibilidades o restricciones, configurándose así un proceso de instrumentación. La figura 1 muestra una ilustración del proceso de construcción de un instrumento a partir de un artefacto.

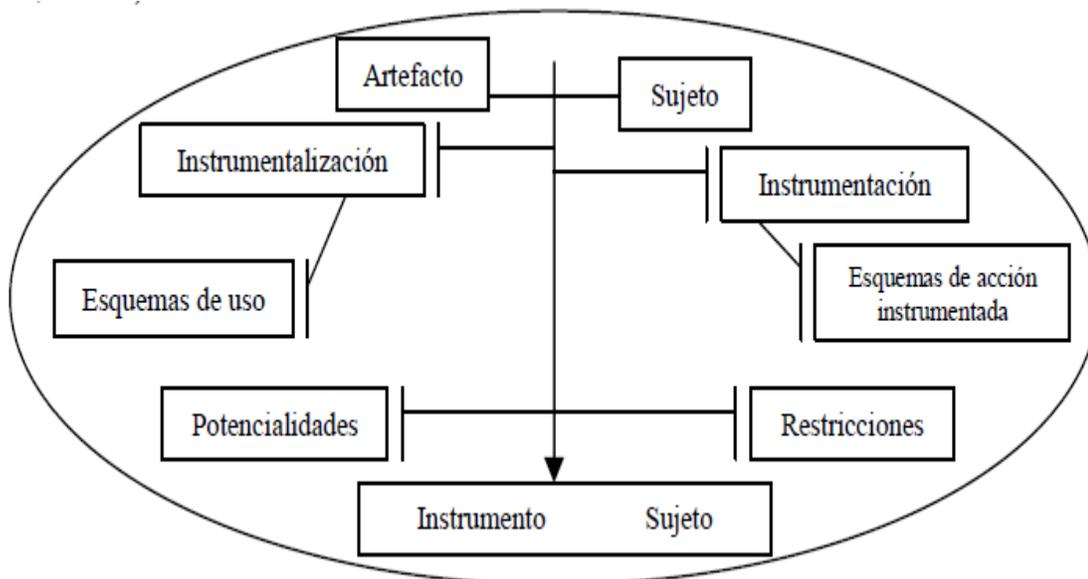


Figura 1. Construcción del artefacto al instrumento producto de la génesis instrumental (Briseño, 2008)

El uso de los diferentes instrumentos debe ser planificado y coordinado, procurando que el propósito de su inclusión en el aula de matemáticas pueda alcanzarse. Para Trouche (2004), la orquestación instrumental toma parte “en la coordinación de todos los instrumentos presentes en la clase y favorece la articulación (...)” (p. 300) de los instrumentos en el trabajo matemático que desarrollan los estudiantes.

El papel del profesor es central en el proceso de orquestación (Trouche & Drijvers, 2014); requiere que el profesor guíe al estudiante con actividades previamente planificadas y realice cambios de acuerdo con la situación novedosa planteada, permitiendo que el estudiante pueda experimentar los procesos de génesis instrumental.

Trouche (2004) define dos elementos para la orquestación instrumental: configuración didáctica y un modo de explotación. Sin embargo, Drijvers, Kieran, y Mariotti (2010) suman un tercero, la actuación docente, para tener en cuenta que una orquestación instrumental se prepara parcialmente de antemano, pero también se crea en el lugar mientras se enseña. Estos tres elementos son definidos por Pérez (2014). El primer elemento: “Una configuración didáctica es un arreglo de artefactos en el ambiente, o en otras palabras, una configuración de la ambientación de la enseñanza y los artefactos involucrados en ella” (p. 15). El segundo:

Un modo de explotación de una configuración didáctica es la manera como el profesor decide explotarla para beneficio de sus intenciones didácticas. Incluye las decisiones sobre la forma en que una tarea es introducida y trabajada, sobre los posibles roles que juegan los artefactos y sobre los esquemas y técnicas a ser desarrollados y establecidos por los estudiantes (p. 15).

El tercer elemento alude al papel del profesor, en referencia a "...las decisiones ad hoc tomadas durante la enseñanza sobre cómo realizar realmente la enseñanza promulgada en la configuración didáctica además del modo de explotación elegidos" (p. 15). Este tercer elemento se consideró por el profesor para el diseño tanto de los ejercicios como de las actividades grupales sostenidas en la sala de sistemas; sin embargo, no se informa sobre ese aspecto en este documento.

La selección e instalación del *software*, la preparación de la sala de sistemas, las actividades y la selección de objetos matemáticos son una "configuración didáctica" que favorece la exploración del proceso de génesis instrumental por parte de los estudiantes. La preparación de los ejercicios, la metodología (grupal, individual) para el desarrollo de estos, el uso de proyector y las explicaciones en tablero representan la forma en que el docente "explota" las potencialidades del *software*. Esta preparación favorece explorar las actuaciones de los estudiantes mientras relacionan los conocimientos previos con los objetos matemáticos propuestos en cada una de las actividades propuestas. La respuesta a preguntas durante el desarrollo de las actividades, así como la explicación de comandos nuevos y no explorados en los manuales de uso del *software* entregados a los estudiantes, son parte de la "actuación docente" que favorece que el profesor reconfigure la orquestación instrumental, brindando sentido a los nuevos procesos emergentes en el desarrollo de estas actividades.

112

Metodología

La investigación se abordó en un paradigma cualitativo. La muestra es incidental (León & Montero, 2003), ya que los estudiantes no son escogidos aleatoriamente y se trabaja con ellos en tanto que están matriculados en el curso. Se informó a los estudiantes que participaban una investigación y sobre el derecho del libre consentimiento, de tal suerte que podían negarse tanto a que sus datos fueran tenidos en cuenta en la investigación como a conceder entrevistas. Se informó, además, que tal negación no sería motivo de discriminación ni en las discusiones de clase, ni en la calificación del curso. La información sobre el derecho del libre consentimiento se hizo durante la investigación.

Se adoptó un enfoque fenomenológico (Maykut & Morehouse, 1994) que permitió analizar interacciones durante el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes. Así mismo, se realizó un estudio de las producciones colectiva e individual, para lo cual es importante identificar los significados de los objetos matemáticos presentes y emergentes durante la solución de los ejercicios, así como los significados de los objetos computacionales que surgían por el uso del *software* en la solución del ejercicio.

El profesor usó el *software* en un contexto ilustrativo (Castro, 2002), en donde utilizaron los recursos representativos provistos por él con el fin de ilustrar representaciones, conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos para resolver los ejercicios. Los significados conferidos a los objetos matemáticos y computacionales presentes y emergentes en la solución de los ejercicios fueron estudiados usando la *Guía de reflexión de objetos y significados* (GROS) (Godino, Rivas, Castro & Konic, 2008). Por su parte, los estudiantes utilizaron el *software* para desarrollar ejercicios matemáticos que dan lugar a la actividad matemática.

Se eligió el *software* wxMaxima² en tanto que permite el trabajo con representaciones algebraicas de forma similar a como lo hacen los estudiantes de forma manual, lo que propone una simplificación en el acceso a los comandos utilizados por la aplicación, que también ofrece representaciones gráficas. Además, se utilizó con el objetivo ético de una formación integral; frente a otras herramientas que pueden presentar iguales características, wxMaxima posee una licencia de instalación GPL (Licencia Pública General) y versión para dispositivos móviles.

El “grupo de trabajo” se asumió como estrategia de colaboración en clase, espacio en el que se podían consultar dudas, o apoyar y compartir ideas e interpretaciones con otros estudiantes. Sin embargo, es importante resaltar que la motivación y la participación no solo se dieron en función de la herramienta, sino de la articulación del proceso educativo diseñado por el docente. Este proceso de articulación fue tenido en cuenta por el investigador como fuente de dificultades, beneficios o sesgos posibles, pero no se informa de sobre el mismo en este trabajo. El primer autor fungió tanto de investigador como de profesor, y si bien su posición puede ser origen de conflictos de interés entre el profesor y el investigador, se tuvo cuidado de diseñar las actividades y los ejercicios para responder al objetivo de la investigación, pero durante la clase se apegó a su papel de docente.

La investigación se inicia con la selección de los artefactos, cuyas características usables coherentes con el tema de estudio —funciones polinómicas— fueron exploradas. Con base en la herramienta seleccionada (wxMaxima) y el contenido del curso, se plantearon ejercicios que promovían la aplicación de conceptos matemáticos a través del uso del *software*, con la guía del docente en los aspectos que fueren necesarios, en concordancia con los objetivos propuestos en cada ejercicio.

Por su parte, los estudiantes utilizaron el *software* para desarrollar ejercicios matemáticos que dan lugar a la actividad³ matemática.

² <http://maxima.sourceforge.net/>

³ Una tarea será la actividad de indagación realizada en el seno de un sistema didáctico (estudiantes, profesor, medio) para dar respuesta a una cuestión (Godino, 2013).

Los ejercicios fueron diseñados por el docente, quien usó el *software* durante la clase y proporcionó una guía para que los estudiantes la cumplimentaran utilizando los medios adecuados para la realización de operaciones, procesamientos y análisis de información, e insistió en que se discutieran las conjeturas, conclusiones y análisis que se desprendieran de ello. Si bien el profesor propuso ejercicios y los discutió, estos últimos y su desarrollo no fueron motivo de estudio. Las discusiones de los ejercicios estaban enmarcadas en los contenidos del curso y formaron parte de la evaluación del mismo; y para la investigación se observó la actuación de los estudiantes frente al uso de los recursos tecnológicos para el desarrollo de las tareas. Las unidades de análisis fueron las soluciones escritas por los estudiantes a los ejercicios que se propusieron durante el curso, que eran motivo de entrega y de calificación.

Resultados

La tabla 2 muestra la *Guía de reconocimiento de objetos y significados matemáticos* (GROS) puestos en juego para la solución de los diferentes ejercicios. Esta tabla fue cumplimentada por el investigador antes de cada sesión, con lo cual se favoreció la identificación de elementos primarios de significado que pueden preparar al profesor para responder a cuestiones planteadas por los estudiantes durante la sesión de clase. En ella se atribuyen significados para las representaciones, conceptos, procedimientos y propiedades tanto matemáticas como computacionales. El argumento se asume como la respuesta dada al poner en consideración los significados atribuidos y sus relaciones. Si se falla en reconocer algunos significados de los objetos matemáticos bajo estudio, es posible que no se obtenga la respuesta. En Godino, Rivas, Castro, y Konic (2008) se presenta un estudio de esta herramienta de análisis cognitivo.

Si bien la GROS puede ser cumplimentada de otras maneras, lo cierto es que manifiesta una posible configuración de objetos y significados que el estudiante, idealmente, debe poner en juego para dar respuesta a la tarea.

La tabla 1 se encuentra cumplimentada con los conceptos y procedimientos presentes en el desarrollo de la actividad 1 (mostrada en la tabla 1) que se diseñó para los estudiantes. Para cada actividad se cumplimentó su respectiva tabla GROS, además de mostrar conceptos y procedimientos que surgen debido a la presencia del ordenador en la solución de la guía.

Tabla 1. Guía 1

Guía clase

Polinomios con wxMaxima

Con esta actividad se pretende identificar las características que hacen que una expresión algebraica pueda ser llamada polinomio, además de utilizar el software wxMaxima para encontrar de diferentes modos las raíces de un polinomio, así como la factorización del mismo con el propósito de familiarizar al sujeto (estudiante) con el uso de la herramienta, y que pueda descubrir sus bondades y limitaciones.

Ejercicio:

1. De la siguiente lista identifique cuáles son polinomios y cuáles no, justificando su respuesta

- a) $x^2 + 3$
Justificación _____
- b) $\frac{1}{4}x^5 + 2x^6 + x^4 - \sqrt{5}x$
Justificación _____
- c) $-5x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x}$
Justificación _____
- d) $\sqrt{(x-2)^4}$
Justificación _____
- e) 5
Justificación _____

2. Encontrar las raíces de un polinomio P(x) y escribir su forma factorizada.

$$P(x) = 2x^7 + 5x^6 + \frac{3x^5}{2} - \frac{17x^4}{4} - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Para solucionar este ejercicio es necesario encontrar los valores de x para los cuales el polinomio P(x) es igual a cero (raíces) y en caso de requerirse determinar la multiplicidad (las veces que se repite) de cada una de estas raíces.

Al analizar el polinomio observamos que es de grado 7; de acuerdo con esto:

a) ¿Cuántas raíces debe presentar el polinomio y a qué conjunto numérico deben pertenecer?

Usando wxMaxima ingresamos el polinomio P(x) y lo asignamos a una variable de nombre de p
Para determinar las raíces del polinomio utilizaremos dos métodos diferentes, un método analítico y un método gráfico.

Procedimiento analítico:

Para este método utilizaremos el comando *solve* haciendo que la variable creada p sea igual a cero

b) ¿Cuántas y cuáles raíces posee el polinomio? ¿Alguna de las raíces puede repetirse, es decir, tener multiplicidad mayor a 1?

Para determinar la multiplicidad de cada raíz vamos a utilizar la división de polinomios, recordando que si al dividir un polinomio P(x) por un polinomio de la forma $x - a$ se obtiene un residuo igual a cero, el valor a es una raíz del polinomio P(x)

- c) Copie imágenes de los resultados de las visiones realizadas en wxMaxima.
- d) De acuerdo con los resultados obtenidos, copie el polinomio factorizado.

Procedimiento gráfico:

El primer paso es construir la representación gráfica del polinomio.

e) Copie la imagen obtenida del software wxMaxima y de acuerdo con ella, responda: ¿cuántas raíces pueden apreciarse en la gráfica? ¿Cuántas debería mostrar?

- f) Utilice la herramienta *zoom* para aumentar la escala de la región de la gráfica que contiene las raíces y responda: ¿cuántas raíces pueden apreciarse en la gráfica? ¿Cuántas debería mostrar? ¿Cuáles son las raíces?
- g) Determine, de acuerdo con la forma de la gráfica en la región de las raíces, cuál es su multiplicidad.

Nota: esta actividad está basada en la factorización de polinomios disponible en <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/resource/view.php?inpopup=true&id=87765> (consultado el 3 de febrero de 2015)

Tabla 2. GROS —Conceptos y nuevos procedimientos—, guía 1

Tipos de Objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
Representaciones (términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, ...)	
Encontrar los ceros	Encontrar los valores que reemplazados por la variable x , se obtenga el valor cero.
Conceptos (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Polinomio	Expresión algebraica que consta de sumas de productos de variables y escalares.
Cero de un polinomio o raíz de un polinomio.	Valor que anula al polinomio.
Grado	Es el máximo exponente de la variable.
Residuo	Valor que se obtiene cuando se reemplaza la variable por un número.
Residuo	Valor que se obtiene cuando el polinomio se divide entre una expresión del tipo $(x-a)$.
Multiplicidad	Número de veces que un mismo factor —monomio o polinomio— se repite.
Factor	Monomio o polinomio que multiplica.
Multiplicidad geométrica	Número de veces que la gráfica pasa por un mismo punto sobre el eje x .
Multiplicidad algebraica	Número de veces que un factor de la forma $(x-a)$ se repite.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
Corte con el eje x	Refiere a un punto de coordenadas $(x,0)$ que pertenezca a la gráfica del polinomio.
Comando	Instrucción que permite, al programa, realizar una acción predeterminada.
<i>Zoom</i>	Comando que permite cambiar la escala alrededor de un punto de elección.
Línea de comandos	Lugar donde se escriben los comandos para que el <i>software</i> desarrolle las acciones solicitadas.
Barra de menú	Lugar que permite acceso gráfico a los comandos más utilizados.
Parámetro	Datos que reciben los comandos, y que deben ser provistos por el usuario. Cada comando recibe parámetros diferentes.

Representación	Signo o configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de ellos mismos.
Procedimientos (técnicas, operaciones, algoritmos)	
División sintética	Refiere al proceso de división entre un polinomio y un monomio en el cual se utiliza el comando <i>divide</i> en Maxima.
Teorema del factor	$(x-a)$ es un factor si y solo si "a" es un cero del polinomio.
Teorema del residuo	Si $(x-a)$ es un factor de $P(x)$ entonces $P(a) = 0$.
Teorema fundamental del álgebra	Un polinomio con coeficientes reales de grado "n" tiene exactamente "n" ceros complejos.
Graficar	Obtener representación cartesiana de la función polinómica.
<i>Zoom</i>	Cambia la escala de la gráfica para apreciar la presencia de más raíces en la ventana de graficación.
<i>Solve</i>	Resuelve la ecuación propuesta.

Las soluciones dadas por los estudiantes a cada una de las cuestiones planteadas en las guías mostraron cierto refinamiento en el uso del software, mediante la utilización de diferentes comandos para obtener y comprobar soluciones. La tabla 3 muestra los comandos utilizados por 19 estudiantes para encontrar las raíces de un polinomio. Se aprecia que los comandos usados —*solve*, *factor*— por los estudiantes, que en apariencia resuelven los problemas, admiten diversas configuraciones correctas que deben ser aprendidas por los estudiantes para dar respuesta a la cuestión matemática. El profesor discutió únicamente el procedimiento que utilizó la estudiante 2 (E2). Se concluye entonces que los estudiantes no solo conocen los comandos, sino que saben usarlos para dar respuesta a las cuestiones matemáticas; han explorado los comandos y han identificado su sintaxis, la cual utilizan para responder las preguntas.

Los estudiantes descubrieron por sí mismos otras maneras válidas de usar los comandos para dar respuesta a las preguntas. En algunas configuraciones se aprecia el uso del "ensayo y error" cuando el *software* indica que hay errores de sintaxis.

Tabla 3. Configuración de comandos para encontrar raíces

Estudiante	Comandos	Estudiante	Comandos
Estudiante 1	<pre>(%i37) solve(%o36); (%o37) [x=1/2, x=-1]</pre>	Estudiante 11	<pre>(%i30) factor(%o29); (%o30) p(x) = (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>

Estudiante 2	<pre>(%i39) solve(%o33=0); (%o39) [x=1/2, x=-1]</pre>	Estudiante 12	<pre>(%i2) factor(%o1); (%o2) p(x) := (8x^7+20x^6+6x^5-17x^4-4x^3+2x-1)/4</pre>
Estudiante 3	<pre>(%i30) factor(%o29); (%o30) p(x) = (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>	Estudiante 13	<pre>(%i7) factor(%o4); (%o7) p(x) = (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>
Estudiante 4	<pre>(%i11) solve(%i10); (%o11) [x=1/2, x=-1]</pre>	Estudiante 14	<pre>(%i6) factor(%o4); (%o6) p(x) := (20x^6+6x^5-17x^4-8x^3+6x^2+58x-1)/4</pre>
Estudiante 5	<pre>(%i20) factor(%o19); (%o20) p(x) = (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>	Estudiante 15	<pre>(%i10) factor(p); (%o10) (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>
Estudiante 6	<pre>(%i30) factor(%o29); (%o30) p(x) := (8x^7+20x^6+6x^5-17x^4-8x^3+6x^2+2x-1)/4</pre>	Estudiante 16	<pre>(%i31) factor(%o29); (%o31) p(x) := (8x^7+20x^6+6x^5-17x^4-8x^3+6x^2+2x-1)/4</pre>
Estudiante 7	<pre>(%i5) factor(p(x)), (%o5) (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>	Estudiante 17	<pre>(%i14) solve(p=0); (%o14) [x=1/2, x=-1]</pre>
Estudiante 8	<pre>(%i16) solve(%o13); (%o16) [x=1/2, x=-1]</pre>	Estudiante 18	<pre>(%i5) solve(p=0); (%o5) [x=1/2, x=-1]</pre>
Estudiante 9	<pre>(%i6) factor(p(x)); (%o6) (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>	Estudiante 19	<pre>(%i36) solve(p=0); (%o36) [x=1/2, x=-1]</pre>
Estudiante 10	<pre>(%i30) factor(%o29); (%o30) p(x) = (x+1)^4 (2x-1)^3 / 4</pre>		

El uso continuado del software permitió que los estudiantes exploraran tanto los conceptos matemáticos como las posibilidades de los comandos para resolver las cuestiones planteadas en los ejercicios, y que siguieran utilizando y explorando

diferentes comandos para validar sus respuestas. De esta forma encontraron otras características u otras restricciones de los comandos y de sus relaciones con los conceptos matemáticos.

La figura 2 muestra la representación gráfica de un polinomio obtenida por un estudiante en el desarrollo de la guía 2, donde se solicitaba señalar las raíces del polinomio de acuerdo con la gráfica del mismo. Se observa que las raíces se presentan en los valores de $x = -3, x = -2, x = 0, x = 3$; sin embargo, para el estudiante no es claro que la gráfica corte al eje en esos puntos y decide hacer un *zoom in* en $x = -3$; el resultado se observa en la figura 3.

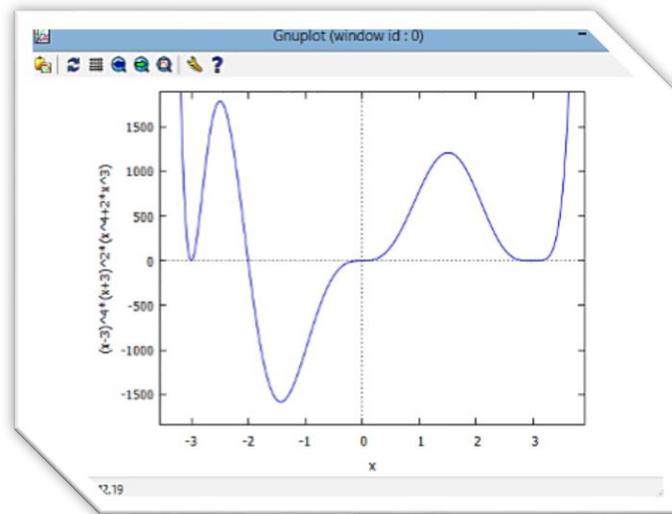


Figura 2. Representación gráfica de polinomio

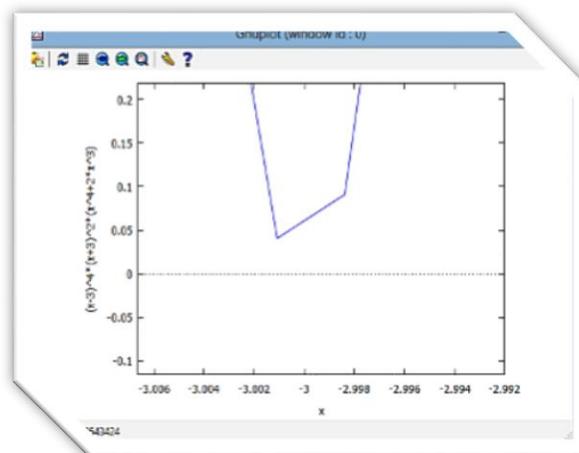


Figura 3. Zoom sobre $x = -3$

Se puede apreciar que la diferencia de escalas entre los ejes es muy grande; ello genera una deformación de la gráfica, además de una imprecisión al graficar que inicialmente no fue percibida por el estudiante, que afirmó "Al hacer zoom vemos que efectivamente la curva no toca el eje, por lo tanto, no es una raíz". Con esta respuesta se aprecia que el estudiante confía en la información gráfica provista por el *software*, pero aún manifiesta dudas y se cuestiona en relación con la veracidad de la información que obtiene "Debido a que tengo dudas verifico cuánto me da la función evaluada en esos puntos (...)". Esta comprobación se observa en la figura 4.

```
[ (%i14) plot2d([f(x)], [x, -5, 5])\n\n[ (%i15) f(-3);\n(%o15) 0\n\n[ (%i16) f(0);\n(%o16) 0\n\n[ (%i17) f(-2);\n(%o17) 0\n\n[ (%i18) f(3);\n(%o18) 0
```

Figura 4. Comprobación de raíces del polinomio

De esta forma se ha encontrado una limitación en el *software* que fue sorteada por el estudiante haciendo uso de otros comandos para encontrar la solución, mostrando un uso racional de los comandos de la aplicación.

La génesis instrumental inició con un sujeto (docente) que analizó el *software* y descubrió potencialidades para estudiar los objetos matemáticos y diseñar tareas matemáticas que permitieran el uso artefactual, con arreglo a objetivos instruccionales matemáticos. El docente hizo corresponder cualidades de objetos matemáticos, emergentes durante la solución de tareas, con potencialidades del recurso tecnológico disponible. La correspondencia se enmarca tanto en restricciones curriculares como culturales, en tanto que los ejercicios propuestos se corresponden con el contenido temático definido para el curso, además de motivar a los estudiantes para que estudien diferentes objetos matemáticos sin usar los procedimientos algorítmicos a los que se están acostumbrados. Tal correspondencia no agota todas las posibilidades de vinculación.

En reacción a la propuesta del docente, los estudiantes pusieron en acto tanto los recursos artefactuales como las actividades de instrumentalización propuestas por el docente y descubrieron opciones de solución expresadas en el uso de comandos que no habían propuestos por el docente, ni habían sido experimentados

por el estudiante; ello aporta pruebas de un proceso de instrumentación tanto sobre el artefacto como sobre el conocimiento matemático. Aquí se percibe una imbricación entre el artefacto y sus características y los objetos matemáticos, el cual ameritaría una ulterior indagación.

Si bien en la figura 1 se aprecia que el artefacto se convierte en instrumento y parece que el sujeto permanece inalterado, conviene afirmar que en la parte final del proceso de génesis instrumental tanto el instrumento como el sujeto conforman una unidad. Un componente adicional que no está incluido en el esquema de la figura 1, pero surgió durante la investigación, alude a la “cooperación” que se manifiesta cuando el estudiante identifica restricciones en el uso del artefacto y busca colectivamente una forma de sortear estas restricciones o limitaciones para obtener soluciones a las cuestiones dadas. Las actividades permitieron la vinculación del conocimiento previo con nuevo, además de un uso crítico del *software* por parte de los estudiantes. Este uso crítico y con arreglo a fines ofrece evidencia de que se dio un proceso de génesis instrumental, como se describe en la figura 5.



Figura 5. Esquema de génesis instrumental – nuevos elementos

Conclusiones

Como se planteó, esta investigación indaga sobre la manera en que se utiliza el *software* wxMaxima en el proceso de aprendizaje de las matemáticas operativas por estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste. La investigación se realizó en condiciones naturales del aula de clase, sin modificar ni el sílabo ni la asignación temporal a cada tema de estudio. El marco teórico de

referencia se construyó a partir de la teoría de la génesis instrumental, específicamente de la instrumentación, y de elementos del enfoque ontosemiótico de la cognición y de la instrucción matemática. La población estudiantil con la cual se trabajó fueron aquellos estudiantes matriculados en el curso de Matemática Operativa. El enfoque investigativo corresponde a la investigación cualitativa.

Se prestó especial atención a determinar la “instrumentación” que los estudiantes manifestaron para responder a la pregunta de investigación. Se encontró que, si bien los estudiantes transitaron por los diferentes pasos del proceso propuesto por Rabardel (1995), iniciando en el artefacto, proponiendo esquemas de uso, descubriendo las potencialidades y las restricciones, para llegar a la configuración de un “instrumento”, ellos pusieron en acto el dispositivo social que se ha denominado “cooperación”. Evidencia de esto se aprecia en las figuras 2, 3 y 4, donde los estudiantes exploran las gráficas y buscan las raíces con los comandos *plot2d* y *zoom*, y evalúan la función ($f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$). Se aprecia tanto el uso crítico de los comandos como la exploración que hacen del concepto “cero de una función”.

Aunque los ejercicios fueron propuestos para ser trabajados individualmente, no se restringió la comunicación entre los estudiantes durante la discusión de las guías. Esto dio origen al componente que se denominó “cooperación”, que busca respuestas a las dificultades estudiantiles para utilizar los comandos del *software* o para interpretar la información provista por ventanas que informaban de errores. La actitud de los estudiantes ante los mensajes de error se manifestó en discusiones con los compañeros que hubieren resuelto el problema, con el propósito de imitar los pasos seguidos o de buscar el error en su estrategia de solución. Estos errores solían ser de escritura de las instrucciones en el programa, de conceptos matemáticos o de uso de comandos.

Como resultado de la investigación, se ha reconfigurado los elementos que conforman la construcción de un “instrumento” a partir de un “artefacto” en el contexto de la génesis instrumental (esto se muestra en la figura 5). La génesis instrumental es iniciada por el profesor por medio de la exploración del *software* y su relación con los conceptos matemáticos, y mediante la determinación tanto de las potencialidades de la aplicación como del establecimiento de esquemas de uso (guías) para que sean desarrolladas por los estudiantes.

La instrumentación se manifestó por los estudiantes, en tanto que presentaron diferentes conductas para desarrollar las guías y comprender los comandos del *software*, configurándose esquemas de acción instrumentada en la que exploraron el *software* para obtener nuevos comandos y nuevas formas de desarrollo de un mismo procedimiento, o para comprobar alguna respuesta previamente obtenida de forma manual. Además, los estudiantes identificaron algunas limitaciones que presentaban el *software* o el dispositivo electrónico (estas últimas no se comentan en este documento). Durante el análisis de las actuaciones de los estudiantes se

identificó un nuevo aspecto en el proceso de la instrumentación, que se ha denominado “cooperación”.

Inicialmente, las actividades diseñadas con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación se plantearon para un desarrollo individual y para explorar la manera en que cada estudiante, con sus condiciones y conocimientos previos, refería a cada una de las cuestiones establecidas; sin embargo, dado que es una actividad motivante para muchos y un reto para otros, los estudiantes compartieron información entre ellos para solucionar los ejercicios y las dificultades surgidas en el uso tanto de los conceptos matemáticos como de los comandos del *software*.

Algunas de las dificultades o restricciones manifestadas por los estudiantes se relacionan con el conocimiento operativo del ordenador, con la comprensión de la sintaxis de los comandos, o con la interpretación de las ventanas de error mostradas por el *software*.

Este aspecto se incluye en la actuación docente que, en un proceso de génesis instrumental, permite al docente realizar modificaciones o incluir nuevas actividades que promuevan el desarrollo de ejercicios que promuevan el surgimiento de los esquemas de uso por parte de los estudiantes, sobre los artefactos dispuestos.

También se debe resaltar que la repetición de acciones conlleva a que los estudiantes exploren nuevos métodos de solución para una misma cuestión. Se entiende la “repetición de acciones” en el sentido de que se solicita al estudiante desarrollar una misma tarea en situaciones diferentes y, como tal, la repetición pone en juego no solo la misma acción, sino la acción en un contexto distinto para responder preguntas diferentes.

Para el caso de la búsqueda de las raíces de un polinomio, este requerimiento estuvo presente en varias de los ejercicios diseñados y se puede apreciar que los estudiantes utilizaron diferentes métodos para obtener una solución: representar gráficamente la función y buscar los interceptos con eje de las abscisas para determinar las raíces de la misma. Además, los estudiantes utilizaron comandos como *factor* para factorizar la función, lo cual favorece una rápida inspección de las raíces; o usaron la función *solve*, que calcula las raíces de la función deseada.

Estas actuaciones dan cuenta de la instrumentación que los estudiantes logran de la herramienta en referencia a las cuestiones matemáticas, pues además de utilizar el artefacto para encontrar soluciones, también lo usaron para validar sus respuestas, lo que muestra confianza en los resultados computacionales que los estudiantes depositan en el *software*. Utilizan el *software* con un propósito ya reconocido en los nombres de los comandos *solve*, *factor*, *plot2d*, *divide*; en ese sentido, “repiten” el uso de un recurso.

El uso de la *Guía de reflexión de objetos y significados*, tanto matemáticos como computacionales, fue importante en este trabajo, dado que favoreció tanto la identificación de objetos matemáticos como de recursos tecnológicos y de sus eventuales correspondencias, lo que ayudó al diseño de las guías propuestas a los estudiantes para el estudio de la función polinómica que se desarrolló en el marco de esta investigación.

Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245–274.
- Briseño, E. (2008). El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socio-epistemológico. *Tesis de Maestría No Publicada*. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Unidad Distrito Federal.
- Castro, W. (2002). Una experiencia docente en el uso ilustrativo de la calculadora durante un curso de cálculo. *Revista EMA*, 7.
- Drijvers, P., Kieran, C. & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical Perspectives. En C. Hoyles y J-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. Nueva York: Springer.
- Flecknoe, M. (2002). "How can ICT help us to improve education"? *Innovations in Education & Teaching International*, 39(4), 271-280.
- Flores, I., González, G. & Rodríguez, I. (2013). Estrategias de enseñanza para abatir la apatía del alumno de secundaria. *Revista Iberoamericana Para La Investigación Y El Desarrollo Educativo*.
- Fowler, D., & Robson, E. (1998). *Historia Mathematica*.
- Godino, Rivas, M., Castro, W., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. *ICME 11*. Morelia: ICME.
- Hannafin, M. J., Hall, C., Land, S., & Hill, J. (1994). "Learning in open-ended environments: assumptions, methods and implications". *Educational Technology*, Vol. 34 No. (8), Pp: 48–55.
- Harris, S. (2002). Innovative pedagogical practices using ICT in schools in England. *Journal of Computer Assisted Learning*, 18, 449-458.
- Hoyrup, J. (1994). *In measure, Number, and weight*. Albany: State University of New York Press.
- León, O. G. & Montero, I. (2003). *Métodos de investigación en Psicología y Educación*. Madrid: McGraw-Hill.
- National Board of Employment, Education and Training (1995b). *Mathematical sciences: Adding to Australia*. Canberra: Australian Government Publishing Service.

- Marqués, P. (2001). Algunas notas sobre el impacto de las TIC en la universidad. *Educar*, 28, 83–98. Recuperado de <http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn28p83.pdf>
- Maykut, P., & Morehouse, R. (1994). *Beginning qualitative research-A philosophic and practical guide*. Londres: Falmer Press.
- Moreno, M. (2012). *Conocimiento y Uso de las TIC desde la perspectiva de los estudiantes de la Universidad de Sonora*. México: Universidad de Sonora.
- Ospina, C. (2010). *Las tics como herramienta de motivación en el aula*. Cundinamarca. Recuperado de <http://intellecctum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/5358/129394.pdf?sequence=1>
- Pérez-Medina, C. R. (2014). "Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática." *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Perspectiva Educacional. Formación de Profesores* 53(2): 129-150
- Pizarro, R. a. (2009). *Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas . Aplicación al caso de Métodos Numéricos*. Universidad Nacional de La Plata. Retrieved from http://postgrado.info.unlp.edu.ar/Carreras/Magisters/Tecnologia_Informatica_Aplicada_en_Educacion/Tesis/Pizarro.pdf
- Pizarro, R. (2009). *Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas . Aplicación al caso de Métodos Numéricos*. Universidad Nacional de La Plata. Recuperado de http://postgrado.info.unlp.edu.ar/Carreras/Magisters/Tecnologia_Informatica_Aplicada_en_Educacion/Tesis/Pizarro.pdf
- Quiroz, S. (2010). *Deserción escolar en Colombia: la muerte de nuestra sociedad*. Recuperado de <http://intergumentacion.blogspot.com.co/2010/11/desercion-escolar-en-colombia-la-muerte.html>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand Collins.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn More about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.
- Trouche, L. and P. Drijvers (2014). *Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education*. Teaching Mathematics and its Applications, Oxford University Press.
- Wood, L. N., & Perrett, G. (1997). *Advanced Mathematical Discourse*. Sydney.